



**TESIS - SM 142501**

# **KENDALI KARBON DIOKSIDA PADA MODEL PERTUMBUHAN ALGA**

**HAJAR**  
**NRP 1213 201 041**

**DOSEN PEMBIMBING**  
**Dr. Dra. Mardlijah, M.T.**

**PROGRAM MAGISTER**  
**JURUSAN MATEMATIKA**  
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**  
**INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER**  
**SURABAYA**  
**2015**



THESIS - SM 142501

# **CARBON DIOXIDE CONTROL ON ALGAE GROWTH MODEL**

HAJAR  
NRP 1213 201 041

SUPERVISOR  
Dr. Dra. Mardlijah, M.T.

MAGISTER DEGREE  
DEPARTEMENT OF MATHEMATICS  
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES  
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER  
SURABAYA  
2015

## **KENDALI KARBON DIOKSIDA PADA MODEL PERTUMBUHAN ALGA**

Nama Mahasiswa : Hajar  
NRP : 1213 201 041  
Pembimbing : Dr. Dra. Mardlijah, M.T.

### **ABSTRAK**

Pemanfaatan tumbuhan alga pada kehidupan manusia cukup banyak. Salah satunya tumbuhan alga dapat menghasilkan biodiesel yang bersifat terbarukan dan ramah lingkungan. Semakin besar pertumbuhan alga maka semakin besar produksi biodiesel. Pertumbuhan alga dipengaruhi oleh glukosa, nutrisi dan proses fotosintesis. Sedangkan Pembentukan glukosa terdiri dari karbon dioksida dan air. Konsentrasi karbon dioksida yang berasal dari aliran karbon dioksida akan mempengaruhi konsentrasi alga kering. Dalam penelitian ini dibahas suatu analisis kestabilan dan keterkontrolan dari model matematika pertumbuhan alga. Selain itu, masalah kendali optimal juga dibahas pada pertumbuhan alga. Adapun fungsi tujuan yang ingin dicapai adalah memaksimumkan konsentrasi alga kering dan variabel pengendalinya adalah aliran karbon dioksida. Penyelesaiannya dengan menerapkan prinsip maksimum Pontryagin. Hasil simulasi menunjukkan bahwa konsentrasi alga kering setelah diberikan kendali dengan bobot konsentrasi karbon dioksida dalam aliran karbon dioksida bernilai 0,3 meningkat sebesar 15,73 %. Pada nilai bobot 1 konsentrasi alga kering meningkat sebesar 13,95 % setelah diberikan kendali. Jadi pertumbuhan alga dan hasil fungsi objektif lebih besar saat bobot konsentrasi karbon dioksida dalam aliran karbon dioksida bernilai 0,3. Sehingga pertumbuhan alga dapat maksimal dengan nilai bobot minimal dari konsentrasi karbon dioksida dalam aliran karbon dioksida.

**Kata kunci :** Alga, Kendali Optimal, Prinsip Maksimum Pontryagin



**KENDALI KARBON DIOKSIDA PADA MODEL  
PERTUMBUHAN ALGA**


Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar  
Magister Sains (M.Si.)

di  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya


Oleh :  
HAJAR  
NRP. 1213 201 041

Tanggal Ujian : 29 Juni 2015  
Periode Wisuda : September 2015

Disetujui oleh :

  
Dr. Dra. Mardlijah, M.T.  
NIP. 19670114 199102 2 001

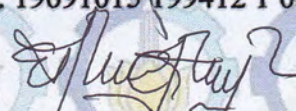
(Pembimbing)

  
Prof. DR. Erna Apriliani, M.Si  
NIP. 19660414 199102 2 001

(Penguji)

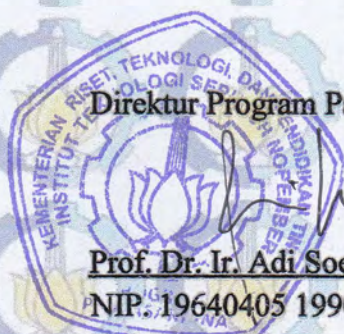
  
Dr. Darmaji, S.Si., M.T  
NIP. 19691015 199412 1 001

(Penguji)

  
Endah Rokhmanti MP, S.Si, M.T, Ph.D.  
NIP. 19761213 200212 2 001

(Penguji)

Direktur Program Pascasarjana

  
Prof. Dr. Ir. Adi Soeprijanto, M.T.  
NIP. 19640405 199002 1 001



## KATA PENGANTAR

*Alhamdulillahirobbil 'alamin*, Puji syukur penulis panjatkan kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan Rahmat, Taufiq, dan Hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis yang berjudul **“Kendali Karbon Dioksida pada Model Pertumbuhan Alga”**. Tesis ini merupakan sebagian persyaratan kelulusan dalam memperoleh gelar magister di Program Studi Magister Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Penyusunan Tesis ini tidak lepas dari bimbingan, bantuan, dan dukungan dari banyak pihak. Oleh sebab itu, dengan segala kerendahan hati penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada : Dr. Dra. Mardlijah, M.T., selaku pembimbing yang penuh kesabaran dan keikhlasan serta bersedia meluangkan pikiran dan waktu dalam memberikan bimbingan dan arahan kepada penulis sehingga Tesis ini dapat terselesaikan. Penulis juga mengucapkan banyak terima kasih kepada :

1. Papa dan Mama “Hasan Telebanu dan Roslia” Terima kasih atas do’a yang tak henti-hentinya, cinta, kasing sayang, perhatian, dan dukungannya selama selama ini. Semoga Penulis bisa membahagiakan papa dan mama. Aamiin
2. Kakakku Candra, SE dan kakak Iparku Yuliana, SE. Terima kasih atas doa, nasehat, dukungan, bantuan dan pengertiannya selama ini. Untuk Ponakanku juga “Faqih Rasya Athallah” yang selalu membuat penulis tersenyum dengan tingkah lucunya.
3. Prof. Ir. Joni Hermana, M.Sc.ES., Ph.D selaku Rektor Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
4. Prof. Dr. Ir. Adi Soeprijanto, M.T., selaku Direktur Program Pascasarjana Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
5. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember dan sebagai dosen penguji, yang telah memberikan masukan dan saran sehingga Tesis dapat diselesaikan dengan baik.

6. Dr. Subiono, M.S., selaku Koordinator Program Studi Pascasarjana Matematika, yang telah memberikan pengarahan dan pengalaman yang berharga.
7. Dr. Imam Mukhlash, S.Si., M.T., selaku dosen wali yang telah memberikan motivasi, arahan, dan bimbingan selama penulis menempuh kuliah.
8. Dr. Darmaji, S.Si., M.T., dan Endah Rokhmati MP, S.Si, M.T, Ph.D., selaku dosen penguji yang telah memberikan masukan dan saran sehingga Tesis ini dapat selesai dengan baik.
9. Seluruh dosen Matematika yang telah memberikan bekal dan ilmu pengetahuan serta staf administrasi Program Studi Magister Matematika atas segala bantuannya.
10. Nyai Nia, Phie, Ngoro Gusti, Olief, dan adek shinta. Terima kasih telah memberi warna di kehidupan penulis.
11. Teman-teman Pascasarjana Matematika ITS angkatan 2013, terima kasih atas kenangan yang kalian berikan.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan Tesis ini masih banyak kekurangan, sehingga kritik dan saran dari pembaca sangat penulis harapkan untuk perbaikan kedepannya. Kritik dan saran bisa dikirim melalui email penulis [hajar.200490@yahoo.com](mailto:hajar.200490@yahoo.com). Akhirnya semoga Tesis ini dapat bermanfaat bagi pembaca, khususnya mahasiswa Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Surabaya, Juli 2015

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>LEMBAR PENGESAHAN .....</b>	<b>i</b>
<b>ABSTRAK .....</b>	<b>iii</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>v</b>
<b>KATA PENGANTAR.....</b>	<b>vii</b>
<b>DAFTAR ISI.....</b>	<b>ix</b>
<b>DAFTAR GAMBAR.....</b>	<b>xi</b>
<b>DAFTAR TABEL .....</b>	<b>xii</b>
<b>BAB 1    PENDAHULUAN .....</b>	<b>1</b>
1.1    Latar Belakang .....	1
1.2    Rumusan Masalah .....	2
1.3    Batasan Masalah.....	2
1.4    Tujuan Penelitian .....	3
1.5    Manfaat Penelitian .....	3
<b>BAB 1    KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI .....</b>	<b>5</b>
2.1    Alga.....	5
2.2    Model Matematika Pertumbuhan Alga .....	7
2.3    Kestabilan Sistem.....	9
2.4    Keterkontrolan Sistem.....	10
2.5    Kendali Optimal .....	11
2.6    Prinsip Maksimum Pontryagin.....	11
<b>BAB 3    METODA PENELITIAN .....</b>	<b>1</b>
<b>BAB 4    HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN.....</b>	<b>17</b>
4.1    Model Matematika .....	28
4.2    Analisis Dinamik Model Pertumbuhan Alga .....	18
4.2.1    Titik Setimbang .....	18
4.2.2    Analisis Kestabilan.....	21
4.2.1    Analisis Keterkontrolan.....	24
4.3    Formulasi Kendali Optimal.....	28
4.4    Simulasi Numerik .....	31
4.4.1    Kestabilan Model Pertumbuhan Alga .....	31
4.4.1    Kendali Optimal Model Pertumbuhan Alga.....	35
<b>BAB 5    KESIMPULAN DAN SARAN.....</b>	<b>41</b>

5.1	Kesimpulan.....	41
5.2	Saran .....	42
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>		<b>43</b>
<b>BIODATA PENULIS .....</b>		<b>45</b>



## DAFTAR TABEL

<b>Tabel 4.1</b>	Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi .....	31
<b>Tabel 4.2</b>	Nilai bobot konsentrasi karbon dioksida dalam aliran karbon dioksida dan nilai fungsi objektif.....	39

## DAFTAR GAMBAR

<b>Gambar 2.1</b>	Produksi alga dari nutrisi dan karbon dioksida .....	8
<b>Gambar 4.1</b>	Perubahan faktor pertumbuhan alga tanpa kendali dengan $(A^0, M^0, S^0, C^0) = (3, 0.4, 10, 5)$ .....	32
<b>Gambar 4.2</b>	Perubahan faktor pertumbuhan alga tanpa kendali dengan $(A^0, M^0, S^0, C^0) = (3, 0.6, 15, 7.5)$ .....	33
<b>Gambar 4.3</b>	Perubahan faktor pertumbuhan alga tanpa kendali dengan $(A^0, M^0, S^0, C^0) = (3, 0.2, 5, 2.5)$ .....	34
<b>Gambar 4.4</b>	Fungsi kontrol dengan nilai bobot konsentrasi karbon dioksida dari aliran karbon dioksida adalah 0,3 .....	35
<b>Gambar 4.5</b>	Fungsi kontrol dengan nilai bobot konsentrasi karbon dioksida dari aliran karbon dioksida adalah 1 .....	35
<b>Gambar 4.6</b>	Perubahan konsentrasi alga kering dengan nilai bobot konsentrasi karbon dioksida dari aliran karbon dioksida adalah 0,3 .....	36
<b>Gambar 4.7</b>	Perubahan konsentrasi alga kering dengan nilai bobot konsentrasi karbon dioksida dari aliran karbon dioksida adalah 1 .....	36
<b>Gambar 4.8</b>	Perubahan konsentrasi nutrisi dengan nilai bobot konsentrasi karbon dioksida dari aliran karbon dioksida adalah 0,3 .....	37
<b>Gambar 4.9</b>	Perubahan konsentrasi nutrisi dengan nilai bobot konsentrasi karbon dioksida dari aliran karbon dioksida adalah 1 .....	37
<b>Gambar 4.10</b>	Perubahan konsentrasi glukosa dengan nilai bobot konsentrasi karbon dioksida dari aliran karbon dioksida adalah 0,3 .....	37
<b>Gambar 4.11</b>	Perubahan konsentrasi glukosa dengan nilai bobot konsentrasi karbon dioksida dari aliran karbon dioksida adalah 1 .....	37
<b>Gambar 4.12</b>	Perubahan konsentrasi karbon dioksida dengan nilai bobot konsentrasi karbon dioksida dari aliran karbon dioksida adalah 0,3 .....	38
<b>Gambar 4.13</b>	Perubahan konsentrasi karbon dioksida dengan nilai bobot konsentrasi karbon dioksida dari aliran karbon dioksida adalah 1 .....	38

<b>Gambar 4.14</b>	Perilaku nilai bobot konsentrasi karbon dioksida dalam aliran karbon dioksida terhadap fungsi objektif .....	40
--------------------	--	----

## BIOGRAFI PENULIS



Penulis yang memiliki nama lengkap Hajar lahir di Kasimbar, 20 April 1990. Penulis telah menempuh pendidikan formal mulai dari SD Inpres Kasimbar, SLTP Negeri 1 Kasimbar, dan SMA Negeri 2 Palu. Setelah lulus dari SMA, penulis melanjutkan studi S1 di Jurusan Matematika Universitas Tadulako Palu dan diterima sebagai mahasiswa angkatan 2008. Penulis lulus sarjana dan wisuda pada bulan Desember 2012 dengan mendapat gelar Sarjana Sains. Penulis melanjutkan studi S2 di Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya pada tahun 2013 melalui jalur Beasiswa BPPDN Dikti dengan NRP. 1213 201 041. Selama kuliah S1 dan S2 di Jurusan Matematika, penulis mengambil Bidang Minat Pemodelan Matematika. Untuk membentuk jaringan atau membutuhkan informasi yang berhubungan dengan tesis ini, penulis dapat dihubungi melalui email [hajar.200490@yahoo.com](mailto:hajar.200490@yahoo.com).

# BAB 1

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Indonesia terkenal dengan sumber kekayaan alam yang sangat banyak, baik di daratan maupun di lautan. Kekayaan alam tersebut dapat dimanfaatkan untuk mengatasi persoalan yang ada. Pengganti bahan bakar yang bersifat terbarukan dan ramah lingkungan dapat diperoleh dari kekayaan alam yaitu biodiesel yang berasal dari minyak nabati mikroalga ataupun rumput laut. Secara umum potensi mikroalga untuk menghasilkan biodiesel sangat besar. Dan memberikan peluang yang besar untuk dapat mengganti kebutuhan bahan bakar yang berasal dari minyak bumi dalam suatu negara.

Selama ini mikroalga dimanfaatkan sebagai makanan larva ikan pada kegiatan budidaya (Taylor dkk, 1997; Shields dkk., 1999; Brown, 2002). Dari banyaknya penelitian untuk mencari pengganti bahan bakar yang bersifat terbarukan dan ramah lingkungan, mikroalga mempunyai prospek yang sangat baik untuk dikembangkan sebagai salah satu alternatif bahan baku penghasil *biofuel*. Mikroalga dipilih karena memiliki kemampuan tumbuh dengan cepat serta tidak memerlukan tempat yang luas untuk kegiatan produksi. Dan memiliki kandungan minyak yang lebih banyak dari yang lainnya. Kandungan dari tumbuhan mikroalga dapat juga dijadikan sebagai bahan makanan, kosmetik dan bahan baku industri farmasi. Selain itu mikroalga mempunyai kemampuan untuk menyerap karbondioksida sehingga dapat mengurangi efek rumah kaca (Widjaja, 2009). Secara ekonomi, mikroalga dipilih karena ketersediaannya serta biaya produksinya yang cukup rendah (Hossain dkk, 2008; Harun dkk, 2010b).

Banyak penelitian yang telah dilakukan untuk memanfaatkan mikroalga sebagai bahan baku *biofuel*. Penelitian yang telah dilakukan cenderung memanfaatkan mikroalga sebagai bahan baku biodiesel (Brown, 2002; Skill, 2007; Patil dkk, 2008; Widjaja, 2009; Amini & Sugiyono, 2009). Hal ini dilakukan mengingat kandungan lipid yang ada pada mikroalga cukup tinggi. Namun demikian, mikroalga juga mengandung karbohidrat yang dapat dimanfaatkan sebagai bahan baku bioetanol (Skill, 2007). Pada penelitian



(Thornton dkk, 2010) model matematika pertumbuhan alga dibangun dengan memanfaatkan air limbah pabrik dan diselesaikan secara numerik sehingga diperoleh hasil panen dan intensitas cahaya pada alga dalam rentan waktu yang telah ditentukan. Sehubungan dengan adanya pemanfaatan mikroalga, salah satunya sebagai bahan bakar biodiesel. Pada penelitian ini, dilakukan pengoptimalan pertumbuhan alga dengan menggunakan metode prinsip maksimum pontryagin berdasarkan parameter yang ada pada model matematika pertumbuhan alga (Thornton dkk, 2010), sehingga dapat menghasilkan bahan bakar biodiesel yang banyak.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang di atas, permasalahan dalam penelitian ini adalah :

- a. Bagaimana sifat-sifat sistem dari model matematika pada pertumbuhan alga?
- b. Bagaimana performansi aliran karbon dioksida yang optimal sehingga dapat memaksimalkan produksi alga?

## **1.3 Batasan Masalah**

Permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini dibatasi sebagai berikut :

- a. Model pertumbuhan alga, airnya berasal dari industri pabrik sehingga memiliki kandungan nutrisi, tetapi komposisi dari kandungan nutrisi diabaikan.
- b. Model matematika pertumbuhan alga diperoleh dari referensi (Thornton dkk, 2010).
- c. Nilai parameter diperoleh dari hasil eksperimen pada referensi (Thornton dkk, 2010).
- d. Penyelesaian kendali optimal menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin.

## **1.4 Tujuan Penelitian**

Tujuan dari penelitian ini adalah :

- a. Untuk mengetahui sifat-sifat sistem dari model matematika pada pertumbuhan alga.
- b. Untuk mengetahui performansi aliran karbon dioksida yang optimal sehingga dapat memaksimalkan produksi alga.

### **1.5 Manfaat Penelitian**

Manfaat dari penelitian ini adalah :

- a. Memberikan informasi mengenai aliran karbon dioksida yang optimal sehingga diperoleh produksi alga yang maksimal dan dapat menghasilkan biodiesel yang banyak.
- b. Pembudidayaan tumbuhan mikroalga dengan penggunaan air limbah pabrik secara tidak langsung dapat mengurangi pencemaran air.
- c. Penerapan kendali optimal pada masalah kimia dan biologi.

## **BAB 2**

### **KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI**

#### **2.1 Alga**

Alga merupakan organisme yang dianggap sebagai nenek moyang tumbuhan saat ini. Alga memiliki beberapa karakteristik yang juga dimiliki oleh tumbuhan saat ini seperti pigmen klorofil. Alga secara morfologi dapat terbagi menjadi dua golongan yaitu mikroalga (alga dengan ukuran mikroskopis) dan makroalga (alga yang berukuran makro). Namun, secara spesifik bentuk tubuh beserta ukurannya tidak akan sama persis dengan tumbuhan dan ukuran tubuhnya sekalipun dalam bentuk makro tidak mudah dilihat dengan mata telanjang. Ciri lainnya pada alga adalah tidak memiliki akar, batang dan daun sejati. Tubuh seperti ini dinamakan talus. Itulah sebabnya alga tidak dapat digolongkan sebagai tumbuhan (plantae). Mikroalga merupakan tumbuhan halus yang berklorofil dan mempunyai pigmen tumbuhan yang dapat menyerap cahaya matahari melalui proses fotosintesis.

Keanekaragaman mikroalga sangat tinggi, diperkirakan ada sekitar 200.000–800.000 spesies mikroalga ada di bumi. Dari jumlah tersebut baru sekitar 35.000 spesies saja yang telah diidentifikasi. Beberapa contoh spesies mikroalga di antaranya yaitu *Spirulina*, *Nannochloropsis* sp., *Botryococcus braunii*, *Chlorella* sp., *Dunaliella primolecta*, *Nitzschia* sp., *Tetraselmis suecia* dan lain-lain. Sel-sel mikroalga tumbuh dan berkembang pada media air, sehingga mempunyai tingkat efisiensi yang lebih tinggi dalam hal penggunaan air, karbondioksida, dan nutrisi lainnya bila dibandingkan dengan tanaman tingkat tinggi (Widjaja, 2009).

Pertumbuhan mikroalga sendiri terdiri dari tiga fase utama, yaitu fase lag, eksponensial, dan stasioner. Kebanyakan spesies mikroalga menghasilkan produk yang khas seperti karotenoid, antioksidan, asam lemak, enzim, polimer, peptida, toksin, dan sterol (Hossain *et al.*, 2008).

Komposisi kimia sel mikroalga berbeda-beda, dipengaruhi oleh banyak faktor seperti jenis spesies dan kondisi kultivasi. Oleh karena itu terdapat peluang

untuk memperoleh mikroalga dengan komposisi kimia tertentu dengan memanipulasi faktor lingkungannya seperti suhu, cahaya, pH, ketersediaan karbondioksida, garam, dan nutrisi lainnya (Basmal, 2008).

Mikroalga merupakan mikroorganisme yang dapat digunakan sebagai bahan baku *biofuel*. Beberapa *biofuel* yang dapat dihasilkan dari mikroalga yaitu hidrogen, biodiesel (yang diperoleh melalui proses transesterifikasi), bioetanol (yang diperoleh melalui proses fermentasi), dan biogas (Skill, 2007; Basmal, 2008; Harun *et al.*, 2010a). Namun demikian, ada beberapa hal penting terkait dengan pemanfaatan mikroalga sebagai bahan baku *biofuel*, yaitu proses produksi mikroalga, proses pemanenan mikroalga, dan proses konversi biomassa menjadi *biofuel* (Skill, 2007).

Mikroalga juga memiliki kelebihan dibandingkan tanaman pangan lainnya untuk dimanfaatkan sebagai bahan baku *biofuel*, yaitu pertumbuhan yang cepat, dapat menggunakan air tawar atau air laut, konsumsi air dalam jumlah sedikit, tidak berkompetisi dengan bahan pangan, biaya produksi yang rendah serta produktivitas tinggi. Mikroalga umumnya bersel satu atau berbentuk benang, sebagai tumbuhan dan dikenal sebagai fitoplankton. Karena mikroalga merupakan organisme mikroskopis yang berklorofil. Dewasa ini fitoplankton telah banyak dimanfaatkan untuk berbagai keperluan manusia antara lain:

a. Bidang perikanan

Sebagai makanan larva ikan, dilakukan melalui isolasi untuk mendapatkan satu spesies tertentu, misalnya *Skeletonema*. Kemudian dibudidayakan pada bak-bak terkontrol pada usaha pembibitan ikan untuk keperluan makanan larva ikan.

b. Industri farmasi dan makanan suplemen

Fitoplankton mempunyai kandungan nutrisi yang tinggi digunakan sebagai makanan suplemen bagi penderita gangguan pencernaan dan yang membutuhkan energi tinggi. Contoh produk yang beredar dari jenis *Chlorella*.

c. Pengolahan limbah logam berat

Dalam pengolahan limbah logam berat fitoplankton dapat digunakan untuk mengikat logam dari badan air dan mengendapkannya pada dasar kolam. Sehingga logam dalam air menjadi berkurang.

d. Sumber energi alternatif biodiesel

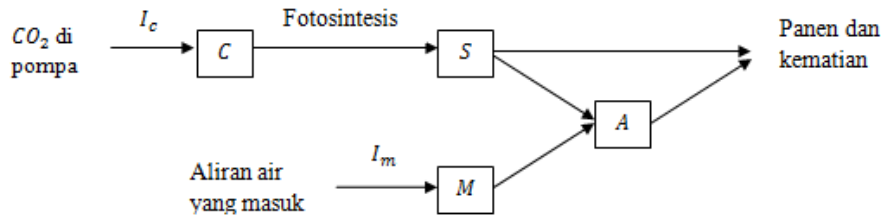
Biomassa mikroalga selain mengandung protein, karbohidrat dan vitamin juga mengandung minyak. Bahkan jenis mikroalga tertentu, misal *Botryococcus braunii* memiliki kandungan minyak yang komposisinya mirip seperti tanaman darat dengan jumlah yang lebih tinggi bila dibanding dengan kandungan minyak pada kelapa, jarak dan sawit.

## 2.2 Model Matematika Pertumbuhan Alga

Di Indonesia terdapat enam pabrik pupuk urea dengan karakteristik limbah cair yang mengandung  $(NH_2)_2CO$  (Urea) dan  $NH_3 - N$  (Amonia-Nitrogen) tidak termasuk senyawa B3, tetapi limbah cair pabrik pupuk urea dapat menimbulkan kerusakan ekosistem badan air yang sangat serius. Penanganan yang telah dilakukan yaitu proses nitrifikasi dan denitrifikasi heterotrik kolam terbuka atau ditambung didalam *pond* besar sehingga terjadi pelepasan amonia ke udara. Tetapi hal tersebut tidak memberikan banyak manfaat, hanya menambah biaya. Ada cara yang lebih menguntungkan yaitu dengan budidaya tumbuhan alga jenis chlorophyta. Alga tersebut merupakan mikroba autotrof yang mampu memanfaatkan  $(NH_2)_2CO$  (urea) dan  $NH_3 - N$  (Amonia-Nitrogen) sebagai sumber nitrogen dan sumber karbon (Faradilla. A & Juwita. A.R., 2010).

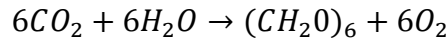
Selanjutnya, pertumbuhan alga dapat diilustrasikan pada Gambar 2.1. Karbon dioksida dipompa ke dalam air dan berubah menjadi glukosa melalui fotosintesis. Kemudian nutrisi yang terdapat di dalam air pembuangan dari rumah kaca dan glukosa bergabung membentuk Alga. Selanjutnya alga dan glukosa yang tersimpan diasumsikan berkurang dengan adanya kematian dan hasil panen. Untuk menjaga model sederhana, komposisi nutrisi diabaikan. Serta energi tidak hanya bisa disimpan dalam glukosa, tetapi juga sebagai glukosa yang lebih kompleks dan minyak.





**Gambar 2.1** Produksi alga dari nutrisi dan karbon dioksida

Produksi alga dimodelkan dengan konsentrasi alga kering ( $A$ ), nutrisi ( $M$ ), glukosa ( $S$ ) dan karbon dioksida ( $C$ ) di kolam. Dengan asumsi bahwa kolam teraduk dengan baik dan pertumbuhan alga sangat lambat, konsentrasi-konsentrasi di atas bersifat independen dari semua variabel spasial dan hanya bergantung pada waktu  $t$ . Masuknya nutrisi dan karbon dioksida ke dalam kolam dilambangkan oleh  $I_m$  dan  $I_c$ . Alga ini sedang kelaparan pada 'tingkat kematian' ( $D_r$ ) dan dipanen ( $h_r$ ), yang keduanya mengurangi jumlah alga dan glukosa yang tersimpan di dalam alga. Selanjutnya, glukosa yang diproduksi ( $\alpha_s C$ ) dari karbon dioksida, di mana  $\alpha_s$  adalah konstan. Hal ini mengurangi jumlah karbon dioksida ( $-k_1 \alpha_s C$ ). Dari proses fotosintetis oksigen



Alga baru diproduksi di dalam alga yang ada ( $\alpha_A f_m(M)$ ) dari nutrisi dan glukosa, di mana  $\alpha_A$  adalah konstanta dan  $f_m(M)$  menunjukkan konsentrasi nutrisi dalam sel. Hal tersebut menghabiskan nutrisi dan glukosa dengan ( $-k_2 \alpha_A f_m(M)$ ) dan ( $-k_3 \alpha_A f_m(M)$ ). Menggabungkan pengaruh pertumbuhan alga, fotosintesis, masuknya karbon dioksida, mineral, kematian dan panen alga. Diperoleh sistem berikut :

$$\dot{A} = \alpha_A f_m(M)S - (D_r + h_r)A \quad (2.1)$$

$$\dot{M} = -k_2 \alpha_A f_m(M)S + I_m \quad (2.2)$$

$$\dot{S} = \alpha_s C - k_3 \alpha_A f_m(M)S - (D_r + h_r)S \quad (2.3)$$

$$\dot{C} = -k_1 \alpha_s C + I_c \quad (2.4)$$

(Thornton dkk, 2010)

### 2.3 Kestabilan Sistem

Analisis kestabilan terbagi menjadi dua macam, yaitu kestabilan sistem autonomus dan kestabilan yang berhubungan dengan masukan dan keluaran sistem. Tetapi kali ini akan dibahas tentang kestabilan sistem autonomos.

Diberikan suatu Persamaan diferensial

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.5)$$

dengan  $x(t) \in R^n$ , vektor  $\bar{x}$  yang memenuhi  $f(\bar{x}) = 0$ . Maka  $\bar{x}$  adalah solusi konstan dari Persamaan (2.5) yang merupakan titik kesetimbangan (Stanislaw, 2003).

Titik setimbang dapat menganalisa kestabilan sistem. Suatu sistem yang dinyatakan dalam Persamaan (2.5) dikatakan stabil apabila penyelesaiannya sangat dekat ke titik setimbang. Jika penyelesaian tersebut konvergen ke titik setimbang, maka sistem tersebut bersifat stabil asimtotik. Sebaliknya, jika penyelesaian menjauhi titik setimbang maka sistem tak stabil.

Sistem dinamik dalam keadaan stabil bila diberikan gangguan berupa masukan maka sistem tersebut tetap mempertahankan kestabilannya yang berarti akan kembali atau mendekati titik setimbang. Sebaliknya jika suatu sistem dinamik dalam keadaan tidak stabil dan diberikan gangguan berupa masukan maka sistem tersebut akan menjauhi titik setimbang. Sehingga perlu dilakukan kestabilan sistem pada sistem dinamik yang keadaannya tidak stabil menjadi stabil. Pada model matematika pertumbuhan alga, jika keadaannya tidak stabil maka pertumbuhan alga akan mengalami osilasi. Hal tersebut terjadi dikarenakan adanya masukan berupa nutrisi dan karbon dioksida. Dari fenomena tersebut, perlu dilakukan kestabilan sistem pada model pertumbuhan alga dengan mengubah keadaan yang tidak stabil menjadi stabil. Agar model pertumbuhan alga dapat mempertahankan kondisi kestabilannya walaupun diberi gangguan berupa masukan nutrisi dan karbon dioksida. Sehingga pertumbuhan alga tidak mengalami osilasi.

Sistem dari Persamaan (2.5) dinyatakan dalam bentuk matriks berikut

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.6)$$

Maka titik setimbang bisa diambil dari titik asal  $\bar{x} = 0$  atau titik lain yang merupakan determinan dari matriks  $A$  sama dengan nol. Kestabilan dari sistem linear pada Persamaan (2.6) dapat ditinjau melalui nilai eigen.

Nilai eigen dari matriks  $A$  pada Persamaan (2.6) dapat digunakan untuk menganalisis kestabilan dari suatu sistem. Kestabilan dalam hal ini dikaitkan dengan titik setimbang. Berdasarkan tanda bagian real dari nilai eigen, sifat stabilitas dari titik setimbang dapat dibedakan menjadi 3 macam, yaitu

- a. Stabil artinya penyelesaian sangat dekat ke titik setimbang di dalam suatu sekitar.
- b. Stabil asimtotik artinya penyelesaian konvergen ke titik setimbang (asalkan titik awal adalah cukup dekat ke titik setimbang).
- c. Tak stabil artinya selalu ada penyelesaian yang dimulai dari manapun dekatnya dengan titik setimbang tapi akhirnya menjauh dari titik setimbang (Subiono, 2013).

## 2.4 Keterkontrolan Sistem

Bukan hanya kestabilan, keterkontrolan suatu sistem linear dapat dianalisis juga. Keterkontrolan sistem menjadi hal yang mendasar dan bermanfaat untuk menstabilkan sistem yang tidak stabil.

Definisi 2.1 (Ogata, 2010)

Sistem linear (2.6) dikatakan terkontrol pada  $t = t_0$ , jika ada sinyal kontrol yang tidak dibatasi kemudian mentransfer keadaan awal untuk setiap keadaan akhir dalam interval waktu yang terbatas  $t_0 \leq t \leq t_1$  (Ogata, 2010).

Solusi dari Persamaan (2.6) adalah

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

dengan menggunakan definisi keterkontrolan maka solusi dari Persamaan (2.6) menjadi

$$x(t_1) = 0 = e^{At_1}x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

atau

$$x(0) = - \int_0^{t_1} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

Berdasarkan definisi 2.1 dan solusi Persamaan (2.6) maka sistem linear (2.6) dikatakan terkontrol jika dan hanya jika vektor  $B, AB, \dots, A^{n-1}B$  adalah bebas linear, atau matriks  $n \times n$  yang merupakan ukuran matriks  $A$

$$[ B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B ]$$

mempunyai rank sama dengan  $n$  (Ogata, 2010).

## 2.5 Kendali Optimal

Tujuan utama dari permasalahan kendali optimal adalah mencari nilai kendali  $u(t)$  yang akan diproses dalam sistem dinamik dan memenuhi konstrain atau kondisi fisik, dengan tujuan memaksimumkan atau meminimumkan fungsi tujuan. Kendali pada saat keadaan dan waktu yang sama dapat ditentukan nilai optimal berdasarkan fungsi tujuan (fungsi objektif) yang diberikan. Formulasi masalah kendali optimal terdiri dari deskripsi secara matematis suatu sistem atau model, menentukan fungsi tujuan dan kendala atau syarat batas yang berlaku. Secara umum, masalah kendali optimal diformulasikan sebagai berikut :

$$J(u(t)) = \Phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt \quad (2.8)$$

Misalkan suatu sistem dinamik dinyatakan oleh Persamaan berikut :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (2.9)$$

Dengan kondisi batas  $x(t_0) = x_0$  dan  $x(t_f) = x_f$  serta  $u(t)$  yang menyatakan pengendali keadaan pada waktu  $t$ .

## 2.6 Prinsip Maksimum Pontryagin

Penyelesaian masalah kendali optimal dengan menggunakan metode tidak langsung dilakukan dengan menyelesaikan kondisi perlu kendali optimal. Berdasarkan Prinsip Maksimum Pontryagin, kondisi perlu dari masalah kendali

optimal yang harus diselesaikan adalah Persamaan stasioner, Persamaan state, dan Persamaan costate serta kondisi *transversality*.

Langkah penyelesaian masalah kendali optimal berdasarkan Persamaan (2.6) dan (2.7) adalah sebagai berikut (Naidu, 2002).

- a. Bentuk fungsi Hamilton

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = L(x(t), u(t), t) + \lambda' f(x(t), u(t), t) \quad (2.10)$$

- b. Maksimumkan  $H$  terhadap  $u(t)$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (2.11)$$

Sehingga diperoleh kondisi stasioner

$$u^*(t) = (x^*(t), \lambda^*(t), t)$$

- c. Selanjutnya akan diperoleh fungsi Hamilton baru yang optimal ( $u^*$ ), dengan Persamaan :

$$H^*(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \leq H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \quad (2.12)$$

- d. Menyelesaikan Persamaan state dan costate

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H^*}{\partial \lambda} \text{ dan } \dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x} \quad (2.13)$$

Dengan kondisi batas diberikan oleh keadaan awal dan keadaan akhir yang disebut kondisi *transversality*.

- e. Substitusi hasil yang diperoleh pada langkah 4 ke dalam Persamaan  $u^*(t)$  pada langkah 2 untuk mendapatkan kendali optimal.

Kondisi batas *transversality* dibedakan menjadi lima tipe berdasarkan perbedaan antara  $t_f$  dan state pada waktu akhir ( $x(t_f)$ ), yaitu :

- a. Waktu akhir dan state saat waktu akhir telah ditentukan atau diketahui

$$x(t_0) = x_0; x(t_f) = x_f$$

- b. Waktu akhir belum ditentukan atau tidak diketahui dan state saat waktu akhir telah ditentukan atau diketahui

$$x(t_0) = x_0; x(t_f) = x_f, (H^* + \frac{\partial S}{\partial t})_{t_f} = 0$$

- c. Waktu akhir telah ditentukan atau diketahui sedangkan state saat waktu akhir belum diketahui atau tidak ditentukan

$$x(t_0) = x_0, \lambda^*(t_f) = \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)_{*t_f}$$



- d. Waktu akhir belum ditentukan atau tidak diketahui dan state saat akhir belum ditentukan atau tidak diketahui dan nilainya bergantung pada sesuatu

$$x(t_0) = x_0; x(t_f) = \varphi(t_f)$$

$$\left( H^* + \frac{\partial S}{\partial t} + \left( \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)_* - \lambda^*(t) \right)' \varphi(t) \right)_{t_f} = 0$$

- e. Waktu akhir belum ditentukan atau tidak diketahui dan state saat akhir belum ditentukan atau tidak diketahui dan nilainya tidak bergantung pada sesuatu.

$$\gamma x(t_0) = x_0$$

$$\left( H^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right)_{t_f} = 0, \left( \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)_* - \lambda^*(t) \right)_{t_f} = 0$$

## **BAB 3**

### **METODA PENELITIAN**

Pada bagian ini diuraikan beberapa metode penelitian yang akan digunakan atau dikerjakan untuk mencapai tujuan penelitian

#### **1.1 Tahapan Penelitian**

##### **a. Studi Literatur**

Dalam tahap ini dilakukan identifikasi permasalahan dan studi literatur dari beberapa buku, jurnal, penelitian, paper, maupun artikel dari internet mengenai referensi tumbuhan mikroalga, model matematika pertumbuhan alga, kestabilan dan keterkontrolan sistem, teori kendali optimal dengan penyelesaiannya menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin.

##### **b. Analisis Kestabilan dan Keterkontrolan Sistem**

Menganalisis kestabilan yaitu dengan menentukan titik setimbang pada model matematika pertumbuhan alga. Kemudian melakukan pelinearan dengan membentuk matriks Jacobian. Sehingga kestabilan sistem dapat ditinjau melalui akar-akar karakteristik dari matriks Jacobian dan kriteria Routh-Hurwitz. Sedangkan sifat keterkontrolan model matematika pertumbuhan alga dapat dianalisis dengan cara membentuk matriks keterkontrolan ( $Ktr$ ) dan menentukan rank dari matriks  $Ktr$  tersebut.

##### **c. Menentukan Formulasi Masalah Kendali Optimal**

Menentukan masalah kendali optimal dari model matematika pertumbuhan alga yang meliputi sistem dinamik dan fungsi objektif serta kondisi syarat batas yang harus dipenuhi.

##### **d. Menentukan Penyelesaian Kendali Optimal**

Setelah diformulasikan masalah kendali optimal, maka langkah selanjutnya yaitu penyelesaian kendali optimal dari model matematika pertumbuhan alga dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Langkah-langkah yang dilakukan pada tahap ini sebagai berikut :

- Membentuk fungsi Hamiltonian,
- Menentukan Persamaan state dan costate,

- Menentukan kondisi batas yang harus dipenuhi,
- Menentukan pengendali optimal,

e. Simulasi

Penelitian sebelumnya, tahap simulasi berdasarkan nilai awal dari setiap state dan rentan waktu yang telah ditentukan. Alga kering dan glukosa telah diketahui nilai awalnya. Sama halnya konsentrasi nutrisi dan karbon dioksida diketahui pula nilai awalnya. Kemudian disimulasikan dalam tiga kasus yang berbeda berdasarkan hasil panen dan intensitas cahaya. Sedangkan pada tahap penelitian ini, dicari solusi numerik dari permasalahan kendali optimal pada model pertumbuhan alga dengan memanfaatkan Persamaan state, costate, Persamaan pengendali optimal serta kondisi-kondisi yang harus terpenuhi. Kemudian akan disimulasikan untuk melihat perilaku sistem pada grafik yang dihasilkan.

f. Analisis Hasil Simulasi

Pada tahap ini, jika hasil simulasi telah diperoleh yaitu berupa tampilan grafik, maka tahap selanjutnya adalah menganalisis hasil simulasi dan membuat pembahasan terhadap hasil simulasi.

g. Penarikan Kesimpulan dan Pemberian Saran

Penarikan kesimpulan dan pemberian saran terhadap simulasi dan pembahasan yang telah dilakukan sebelumnya serta pemberian saran untuk perbaikan dan pengembangan penelitian selanjutnya.

h. Publikasi Hasil Penelitian

i. Penulisan Laporan Tesis

Penulisan laporan tesis dilakukan mulai awal mengerjakan penelitian sampai batas waktu yang telah ditentukan.

## BAB 4

### HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan model matematika yang digunakan maka pada bab ini akan dibahas tentang analisis dinamik dari model tersebut. Analisis dinamik meliputi analisis kestabilan dan keterkontrolan. Selain itu, diformulasikan masalah kendali optimal karbon dioksida pada model pertumbuhan alga.

#### 4.1 Model Matematika

Pada penelitian ini model pertumbuhan alga (Thorthon dkk, 2010) adalah sebagai berikut :

$$\dot{A} = \alpha_A f_m(M)S - (D_r + h_r)A \quad (4.1)$$

$$\dot{M} = -k_2 \alpha_A f_m(M)S + I_m(t) \quad (4.2)$$

$$\dot{S} = \alpha_S C - k_3 \alpha_A f_m(M)S - (D_r + h_r)S \quad (4.3)$$

$$\dot{C} = -k_1 \alpha_S C + I_c(t) \quad (4.4)$$

Dengan

$A$  : konsentrasi alga kering

$M$  : konsentrasi nutrisi

$S$  : konsentrasi glukosa

$C$  : konsentrasi karbon dioksida

$f_m(M)$  : konsentrasi nutrisi dalam sel alga

$I_c(t)$  : aliran masuk karbon dioksida

$I_m(t)$  : aliran masuk nutrisi

$D_r$  : tingkat kematian alga

$h_r$  : tingkat panen alga

$\alpha_A$  : konstanta pertumbuhan biomassa

$\alpha_S$  : konstanta fotosintesis

$k_1$  : tingkat perubahan  $CO_2$  menjadi  $(CH_2O)_6$

$k_2$  : tingkat perubahan nutrisi menjadi alga kering

$k_3$  : tingkat perubahan  $(CH_2O)_6$  menjadi alga kering

diasumsikan bahwa konsentrasi nutrisi dalam sel jenuh  $p_{\max} = 0,4 \text{ g[M]m}^{-3}$  dan setengah jenuh diperoleh ketika nutrisi diluar  $M_{Turn} = 4 \text{ g[M]m}^{-3}$ . Maka

$$f_m(M) = p_{\max} \left( \frac{M}{M + M_{Turn}} \right)$$

sehingga Persamaan (4.1) – (4.4) menjadi

$$\dot{A} = \alpha_A \left( p_{\max} \frac{M}{M + M_{Turn}} \right) S - (D_r + h_r) A \quad (4.5)$$

$$\dot{M} = -k_2 \alpha_A \left( p_{\max} \frac{M}{M + M_{Turn}} \right) S + I_m(t) \quad (4.6)$$

$$\dot{S} = \alpha_s C - k_3 \alpha_A \left( p_{\max} \frac{M}{M + M_{Turn}} \right) S - (D_r + h_r) S \quad (4.7)$$

$$\dot{C} = -k_1 \alpha_s C + I_c(t) \quad (4.8)$$

## 4.2 Analisis Dinamik Model Pertumbuhan Alga

Persamaan (4.5) – (4.8) adalah model matematika yang merupakan sistem dinamik dari permasalahan kendali optimal karbon dioksida pada model pertumbuhan alga. Untuk melakukan analisis dinamik, terlebih dahulu menentukan titik setimbang dari sistem dinamik. Selanjutnya, dilakukan analisis kestabilan dan keterkontrolsn pada titik setimbang.

### 4.2.1 Titik Setimbang

Titik setimbang dari sistem dinamik dapat di peroleh dari  $\dot{A} = 0$ ,  $\dot{M} = 0$ ,  $\dot{S} = 0$  dan  $\dot{C} = 0$ . Sehingga Persamaan (4.5) – (4.8) menjadi

$$\begin{aligned} \alpha_A \left( p_{\max} \frac{M}{M + M_{Turn}} \right) S - (D_r + h_r) A &= 0 \\ \alpha_A p_{\max} M S - (D_r + h_r) A (M + M_{Turn}) &= 0 \\ -k_2 \alpha_A \left( p_{\max} \frac{M}{M + M_{Turn}} \right) S + I_m(t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$



$$-k_2\alpha_A p_{\max} MS + i_m(t)(M + M_{Turn}) = 0 \quad (4.10)$$

$$\alpha_s C - k_3\alpha_A \left( p_{\max} \frac{M}{M + M_{Turn}} \right) S - (D_r + h_r)S = 0$$

$$\alpha_s C (M + M_{Turn}) - k_3\alpha_A p_{\max} MS - (D_r + h_r)S (M + M_{Turn}) = 0 \quad (4.11)$$

$$-k_1\alpha_s C + I_c(t) = 0 \quad (4.12)$$

dari Persamaan (4.12) diperoleh

$$\begin{aligned} -k_1\alpha_s C + I_c(t) &= 0 \\ k_1\alpha_s C &= I_c(t) \\ C &= \frac{I_c(t)}{k_1\alpha_s} \end{aligned} \quad (4.13)$$

jika Persamaan (4.13) disubstitusikan ke Persamaan (4.11) didapatkan

$$\begin{aligned} \alpha_s C (M + M_{Turn}) - k_3\alpha_A p_{\max} MS - (D_r + h_r)S (M + M_{Turn}) &= 0 \\ \frac{I_c(t)}{k_1} (M + M_{Turn}) - k_3\alpha_A p_{\max} MS - (D_r + h_r)S (M + M_{Turn}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Selanjutnya, Persamaan (4.10) dan (4.14)

$$\begin{aligned} -k_2\alpha_A p_{\max} MS + i_m(t)(M + M_{Turn}) &= 0 \\ \frac{I_c(t)}{k_1} (M + M_{Turn}) - k_3\alpha_A p_{\max} MS - (D_r + h_r)S (M + M_{Turn}) &= 0 \end{aligned}$$

dengan menggunakan metode eliminasi Persamaan (4.10) dan (4.14) maka didapatkan

$$\begin{aligned} -k_2k_3\alpha_A p_{\max} MS + k_3i_m(t)(M + M_{Turn}) &= 0 \\ \left( \frac{k_2I_c(t)}{k_1} \right) (M + M_{Turn}) - k_2k_3\alpha_A p_{\max} MS - (D_r + h_r)k_2S (M + M_{Turn}) &= 0 \\ \hline k_3I_m(t)(M + M_{Turn}) - \left( \frac{k_2I_c(t)}{k_1} \right) (M + M_{Turn}) + (D_r + h_r)k_2S (M + M_{Turn}) &= 0 \\ (D_r + h_r)k_2S (M + M_{Turn}) = \left( \frac{k_2I_c(t)}{k_1} \right) (M + M_{Turn}) - k_3I_m(t)(M + M_{Turn}) \\ (D_r + h_r)k_2S &= \left( \frac{k_2I_c(t)}{k_1} \right) - k_3I_m(t) \\ S &= \frac{k_2I_c(t)}{k_1k_2(D_r + h_r)} - \frac{k_3I_m(t)}{k_2(D_r + h_r)} \end{aligned}$$

$$S = \frac{k_2 I_c(t) - k_1 k_3 I_m(t)}{k_1 k_2 (D_r + h_r)} \quad (4.15)$$

Jika Persamaan (4.15) disubstitusikan ke Persamaan (4.10) diperoleh

$$\begin{aligned} -k_2 \alpha_A p_{\max} MS + i_m(t)(M + M_{Turn}) &= 0 \\ -k_2 \alpha_A p_{\max} M \left( \frac{k_2 I_c(t) - k_1 k_3 I_m(t)}{k_1 k_2 (D_r + h_r)} \right) + I_m(t)(M + M_{Turn}) &= 0 \\ -\alpha_A p_{\max} M \left( \frac{k_2 I_c(t) - k_1 k_3 I_m(t)}{k_1 (D_r + h_r)} \right) + I_m(t)M &= -I_m(t)M_{Turn} \\ M \left( -\alpha_A p_{\max} \left( \frac{k_2 I_c(t) - k_1 k_3 I_m(t)}{k_1 (D_r + h_r)} \right) + I_m(t) \right) &= -I_m(t)M_{Turn} \\ M \left( \frac{-k_2 I_c(t) \alpha_A p_{\max} + k_1 k_3 I_m(t) \alpha_A p_{\max} + k_1 I_m(t)(D_r + h_r)}{k_1 (D_r + h_r)} \right) &= -I_m(t)M_{Turn} \\ M = (-I_m(t)M_{Turn}) \left( \frac{k_1 (D_r + h_r)}{-k_2 I_c(t) \alpha_A p_{\max} + k_1 k_3 I_m(t) \alpha_A p_{\max} + k_1 I_m(t)(D_r + h_r)} \right) \\ M = (I_m(t)M_{Turn}) \left( \frac{k_1 (D_r + h_r)}{k_2 I_c(t) \alpha_A p_{\max} - k_1 k_3 I_m(t) \alpha_A p_{\max} - k_1 I_m(t)(D_r + h_r)} \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Selanjutnya substitusikan Persamaan (4.15) dan (4.16) ke Persamaan (4.9) diperoleh

$$\begin{aligned} \alpha_A p_{\max} MS - (D_r + h_r)A(M + M_{Turn}) &= 0 \\ (D_r + h_r)A(M + M_{Turn}) &= \alpha_A p_{\max} MS \\ A &= \frac{\alpha_A p_{\max} MS}{(D_r + h_r)(M + M_{Turn})} \\ &= \frac{\alpha_A p_{\max} MS}{(D_r + h_r)M + (D_r + h_r)M_{Turn}} \\ &= \left( \alpha_A p_{\max} \left( (I_m(t)M_{Turn}) \left( \frac{k_1 (D_r + h_r)}{k_2 I_c(t) \alpha_A p_{\max} - k_1 k_3 I_m(t) \alpha_A p_{\max} - k_1 I_m(t)(D_r + h_r)} \right) \right) \right) \\ &\quad \left( \frac{k_2 I_c(t) - k_1 k_3 I_m(t)}{k_1 k_2 (D_r + h_r)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{(D_r + h_r) \left( (I_m(t) M_{Turn}) \left( \frac{k_1 (D_r + h_r)}{k_2 I_c(t) \alpha_A p_{\max} - k_1 k_3 I_m(t) \alpha_A p_{\max} - k_1 I_m(t) (D_r + h_r)} \right) \right) + (D_r + h_r) M_{Turn}} \right) \\
&= (\alpha_A p_{\max}) \left( (I_m(t) M_{Turn}) \left( \frac{k_2 I_c(t) - k_1 k_3 I_m(t)}{k_2 (k_2 I_c(t) \alpha_A p_{\max} - k_1 k_3 I_m(t) \alpha_A p_{\max} - k_1 I_m(t) (D_r + h_r))} \right) \right) \\
& \quad \left( \frac{1}{\left( \frac{(I_m(t) M_{Turn}) k_1 (D_r + h_r)^2 + (D_r + h_r) M_{Turn}}{(k_2 I_c(t) \alpha_A p_{\max} - k_1 k_3 I_m(t) \alpha_A p_{\max} - k_1 I_m(t) (D_r + h_r))} \right)} \right) \\
&= (\alpha_A p_{\max}) \left( (I_m(t) M_{Turn}) \frac{k_2 I_c(t) - k_1 k_3 I_m(t)}{k_2 ((D_r + h_r) M_{Turn} (k_2 I_c(t) \alpha_A p_{\max} - k_1 k_3 I_m(t) \alpha_A p_{\max}))} \right) \\
&= \left( \frac{(I_m(t) M_{Turn})}{k_2 ((D_r + h_r) M_{Turn})} \right) \\
&= \left( \frac{I_m(t)}{k_2 (D_r + h_r)} \right) \tag{4.17}
\end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (4.13), (4.15), (4.16) dan (4.17) dapat diperoleh nilai dari

$$\begin{aligned}
C^* &= \frac{I_c(t)}{k_1 \alpha_S}, \quad S^* = \frac{k_2 I_c(t) - k_1 k_3 I_m(t)}{k_1 k_2 (D_r + h_r)}, \quad M^* = (I_m(t) M_{Turn}) (k_1 (D_r + h_r)) \\
& \quad \left( \frac{1}{k_2 I_c(t) \alpha_A p_{\max} - k_1 k_3 I_m(t) \alpha_A p_{\max} - k_1 I_m(t) (D_r + h_r)} \right), \quad A^* = \left( \frac{I_m(t)}{k_2 (D_r + h_r)} \right)
\end{aligned}$$

dengan demikian titik setimbang dari sistem dinamik model pertumbuhan alga adalah  $E^* = (A^*, M^* S^*, C^*)$ .

#### 4.2.2 Analisis Kestabilan

Dengan diperolehnya titik setimbang dari sistem dinamik, maka selanjutnya dapat menganalisis kestabilan di titik setimbang tersebut. Karena

sistem dinamik pada Persamaan (4.5) – (4.8) bersifat non-linear, maka Persamaan (4.5) – (4.8) terlebih dahulu dilinearkan. Adapun langkah-langkah dari pelinearan sebagai berikut :

Misalkan

$$f_1 = \alpha_A \left( p_{\max} \frac{M}{M + M_{Turn}} \right) S - (D_r + h_r) A \quad (4.18)$$

$$f_2 = -k_2 \alpha_A \left( p_{\max} \frac{M}{M + M_{Turn}} \right) S + I_m(t) \quad (4.19)$$

$$f_3 = \alpha_s C - k_3 \alpha_A \left( p_{\max} \frac{M}{M + M_{Turn}} \right) S - (D_r + h_r) S \quad (4.20)$$

$$f_4 = -k_1 \alpha_s C + I_c(t) \quad (4.21)$$

Selanjutnya persamaan (4.18) – (4.21) diturunkan terhadap  $A, M, S, C$  dengan menggunakan matriks Jacobian sebagai berikut :

$$\bar{J}(A, M, S, C) = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & j_{14} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} & j_{24} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} & j_{34} \\ j_{41} & j_{42} & j_{43} & j_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial A} & \frac{\partial f_1}{\partial M} & \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial C} \\ \frac{\partial f_2}{\partial A} & \frac{\partial f_2}{\partial M} & \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial C} \\ \frac{\partial f_3}{\partial A} & \frac{\partial f_3}{\partial M} & \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial C} \\ \frac{\partial f_4}{\partial A} & \frac{\partial f_4}{\partial M} & \frac{\partial f_4}{\partial S} & \frac{\partial f_4}{\partial C} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Dengan

$$\frac{\partial f_1}{\partial A} = -(D_r + h_r)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial M} = \frac{\alpha_A p_{\max} S}{M + M_{Turn}} - \frac{\alpha_A p_{\max} MS}{(M + M_{Turn})^2}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial S} = \frac{\alpha_A p_{\max} M}{M + M_{Turn}}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial C} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial A} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial M} = -\frac{k_3 \alpha_A p_{\max} S}{M + M_{Turn}} + \frac{k_3 \alpha_A p_{\max} MS}{(M + M_{Turn})^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial A} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial M} = -\frac{k_2 \alpha_A p_{\max} S}{M + M_{Turn}} + \frac{k_2 \alpha_A p_{\max} MS}{(M + M_{Turn})^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial S} = -\frac{k_2 \alpha_A p_{\max} M}{M + M_{Turn}}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial C} = 0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial A} = 0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial M} = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_3}{\partial S} &= -\frac{k_3 \alpha_A p_{\max} M}{M + M_{Turn}} - (D_r + h_r) & \frac{\partial f_4}{\partial S} &= 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial C} &= \alpha_S & \frac{\partial f_4}{\partial C} &= -k_1 \alpha_S\end{aligned}$$

Selanjutnya, substitusikan titik setimbang  $E^* = (A^*, M^*, S^*, C^*)$  ke matriks Jacobian pada Persamaan (4.22) sehingga diperoleh

$$\bar{J}^*(A^*, M^*, S^*, C^*) = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & 0 \\ 0 & X_4 & X_5 & 0 \\ 0 & X_6 & X_7 & X_8 \\ 0 & 0 & 0 & X_9 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Dengan

$$\begin{aligned}X_1 &= -(D_r + h_r) & X_6 &= -\frac{k_3 \alpha_A p_{\max} S^*}{M^* + M_{Turn}} + \frac{k_3 \alpha_A p_{\max} M^* S^*}{(M^* + M_{Turn})^2} \\ X_2 &= \frac{\alpha_A p_{\max} S^*}{M^* + M_{Turn}} - \frac{\alpha_A p_{\max} M^* S^*}{(M^* + M_{Turn})^2} & X_7 &= -\frac{k_3 \alpha_A p_{\max} M^*}{M^* + M_{Turn}} - (D_r + h_r) \\ X_3 &= \frac{\alpha_A p_{\max} S^*}{M^* + M_{Turn}} & X_8 &= \alpha_S \\ X_4 &= -\frac{k_2 \alpha_A p_{\max} S^*}{M^* + M_{Turn}} + \frac{k_2 \alpha_A p_{\max} M^* S^*}{(M^* + M_{Turn})^2} & X_9 &= -k_1 \alpha_S \\ X_5 &= -\frac{k_2 \alpha_A p_{\max} M^*}{M^* + M_{Turn}}\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh sistem yang linear sebagai berikut :

$$g_1 = -(D_r + h_r) + \frac{\alpha_A p_{\max} M^* S^*}{M^* + M_{Turn}} - \frac{\alpha_A p_{\max} M^* S^*}{(M^* + M_{Turn})^2} + \frac{\alpha_A p_{\max} S^*}{M^* + M_{Turn}} \quad (4.24)$$

$$g_2 = -\frac{k_2 \alpha_A p_{\max} S^*}{M^* + M_{Turn}} + \frac{k_2 \alpha_A p_{\max} M^* S^*}{(M^* + M_{Turn})^2} - \frac{k_2 \alpha_A p_{\max} M^*}{M^* + M_{Turn}} \quad (4.25)$$

$$g_3 = -\frac{k_3 \alpha_A p_{\max} S^*}{M^* + M_{Turn}} + \frac{k_3 \alpha_A p_{\max} M^* S^*}{(M^* + M_{Turn})^2} - \frac{k_3 \alpha_A p_{\max} M^*}{M^* + M_{Turn}} - (D_r + h_r) + \alpha_S \quad (4.26)$$

$$g_4 = -k_1 \alpha_S \quad (4.27)$$

Persamaan (4.25) – (4.27) menunjukkan sistem bersifat linear. Selanjutnya kestabilan sistem dinamik dapat ditinjau melalui nilai eigen dari matriks Jacobian.

Dengan menyelesaikan Persamaan  $\det(\bar{J}^* - \lambda I) = 0$ .

$$\det \begin{bmatrix} (X_1 - \lambda) & X_2 & X_3 & 0 \\ 0 & (X_4 - \lambda) & X_5 & 0 \\ 0 & X_6 & (X_7 - \lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (X_9 - \lambda) \end{bmatrix} = 0$$

$$(X_1 - \lambda) \left( \det \begin{bmatrix} (X_4 - \lambda) & X_5 & 0 \\ X_6 & (X_7 - \lambda) & 0 \\ 0 & 0 & (X_9 - \lambda) \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$(X_1 - \lambda)(X_4 - \lambda) \left( \det \begin{bmatrix} (X_7 - \lambda) & 0 \\ 0 & (X_7 - \lambda) \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$(X_1 - \lambda)(X_4 - \lambda)(X_7 - \lambda)(X_7 - \lambda) - 0 = 0$$

$$(X_1 - \lambda)(X_4 - \lambda)(X_7 - \lambda)(X_7 - \lambda) = 0$$

Diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = X_1 = -(D_r + h_r)$$

$$\lambda_2 = X_4 = -\frac{k_2 \alpha_A p_{\max} S^*}{M^* + M_{Turn}} + \frac{k_2 \alpha_A p_{\max} M^* S^*}{(M^* + M_{Turn})^2}$$

$$\lambda_3 = X_7 = -\frac{k_3 \alpha_A p_{\max} M^*}{M^* + M_{Turn}} - (D_r + h_r)$$

$$\lambda_4 = X_9 = -k_1 \alpha_S$$

Karena semua nilai parameter bernilai positif dan disubstitusikan ke nilai eigen  $(\lambda_1)$ ,  $(\lambda_3)$  dan  $(\lambda_4)$ . Di peroleh semua nilai eigen bertanda negatif. Sedangkan

untuk nilai eigen  $(\lambda_2)$  bertanda negatif jika  $-\frac{k_2 \alpha_A p_{\max} S^*}{M^* + M_{Turn}} < \frac{k_2 \alpha_A p_{\max} M^* S^*}{(M^* + M_{Turn})^2}$

dengan  $\frac{k_2 \alpha_A p_{\max} S^*}{M^* + M_{Turn}} < 0$  dan  $\frac{k_2 \alpha_A p_{\max} M^* S^*}{(M^* + M_{Turn})^2} < 0$  sehingga titik setimbang

$E^* = (A^*, M^*, S^*, C^*)$  bersifat stabil.

#### 4.2.3 Analisis Keterkontrolan

Sifat dari suatu sistem dinamik bukan hanya sifat kestabilan tetapi ada juga sifat keterkontrolan. Untuk melakukan analisis keterkontrolan, perlu melakukan pelinearan terhadap sistem dinamik pada Persamaan (4.5 – 4.8). Jika matriks

Jacobian pada Persamaan (4.23) yang dilinearkan di sekitar titik setimbang dimisalkan matriks  $\bar{A}$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & 0 \\ 0 & X_4 & X_5 & 0 \\ 0 & X_6 & X_7 & X_8 \\ 0 & 0 & 0 & X_9 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

dan matriks  $\bar{B}$  sebagai berikut :

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial I_c} \\ \frac{\partial f_2}{\partial I_c} \\ \frac{\partial f_3}{\partial I_c} \\ \frac{\partial f_4}{\partial I_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Berdasarkan definisi 2.1 dan solusi Persamaan (2.6), dapat disusun matriks keterkontrolan ( $Ktr$ ) berukuran  $4 \times 4$  sebagai berikut

$$Ktr = (\bar{B} \mid \overline{AB} \mid \overline{A^2B} \mid \overline{A^3B})$$

Selanjutnya untuk matriks  $\overline{AB}$  sebagai berikut :

$$\overline{AB} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & 0 \\ 0 & X_4 & X_5 & 0 \\ 0 & X_6 & X_7 & X_8 \\ 0 & 0 & 0 & X_9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ X_8 \\ X_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_s \\ -k_1 \alpha_s \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Sedangkan matriks  $\overline{A^2B}$  sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \overline{A^2B} &= [\bar{A}] [\overline{AB}] \\ &= \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & 0 \\ 0 & X_4 & X_5 & 0 \\ 0 & X_6 & X_7 & X_8 \\ 0 & 0 & 0 & X_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_s \\ -k_1 \alpha_s \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} (X_1)(0) + (X_2)(0) + (X_3)(\alpha_s) + (0)(-k_1\alpha_s) \\ (0)(0) + (X_4)(0) + (X_5)(\alpha_s) + (0)(-k_1\alpha_s) \\ (0)(0) + (X_6)(0) + (X_7)(\alpha_s) + (X_8)(-k_1\alpha_s) \\ (0)(0) + (0)(0) + (0)(\alpha_s) + (X_9)(-k_1\alpha_s) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 + 0 + (X_3)(\alpha_s) + 0 \\ 0 + 0 + (X_5)(\alpha_s) + 0 \\ 0 + 0 + (X_7)(\alpha_s) + (X_8)(-k_1\alpha_s) \\ 0 + 0 + 0 + (X_9)(-k_1\alpha_s) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (X_3)(\alpha_s) \\ (X_5)(\alpha_s) \\ (X_7)(\alpha_s) + (X_8)(-k_1\alpha_s) \\ (X_9)(-k_1\alpha_s) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

menggunakan pemisalan variabel baru diperoleh matriks  $\overline{A^2B}$  sebagai berikut

$$\overline{A^2B} = \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \\ m_{41} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

dengan

$$\begin{aligned}
m_{11} &= (X_3)(\alpha_s) & m_{31} &= (X_7)(\alpha_s) + (X_8)(-k_1\alpha_s) \\
&= \left( \frac{\alpha_A p_{\max} M^*}{M + M_{Turn}} \right) (\alpha_s) & &= \left( -\frac{k_3 \alpha_A p_{\max} M^*}{M^* + M_{Turn}} - (D_r + h_r) \right) (\alpha_s) + (\alpha_s)(-k_1\alpha_s) \\
&= \frac{\alpha_A \alpha_s p_{\max} M^*}{M + M_{Turn}} & &= -\frac{k_3 \alpha_A \alpha_s p_{\max} M}{M^* + M_{Turn}} - \alpha_s D_r - \alpha_s h_r - k_1 (\alpha_s)^2 \\
m_{21} &= (X_5)(\alpha_s) & m_{41} &= (X_9)(-k_1\alpha_s) \\
&= \left( -\frac{k_2 \alpha_A p_{\max} M^*}{M^* + M_{Turn}} \right) (\alpha_s) & &= (-k_1\alpha_s)(-k_1\alpha_s) \\
&= -\frac{k_2 \alpha_A \alpha_s p_{\max} M^*}{M^* + M_{Turn}} & &= (k_1)^2 (\alpha_s)^2
\end{aligned}$$

Sedangkan matriks  $\overline{A^3B}$  sebagai berikut :

$$\overline{A^3B} = [\overline{A}] [\overline{A^2B}]$$



$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & 0 \\ 0 & X_4 & X_5 & 0 \\ 0 & X_6 & X_7 & X_8 \\ 0 & 0 & 0 & X_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \\ m_{41} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (X_1)(m_{11}) + (X_2)(m_{21}) + (X_3)(m_{31}) + (0)(m_{41}) \\ (0)(m_{11}) + (X_4)(m_{21}) + (X_5)(m_{31}) + (0)(m_{41}) \\ (0)(m_{11}) + (X_6)(m_{21}) + (X_7)(m_{31}) + (X_8)(m_{41}) \\ (0)(m_{11}) + (0)(m_{21}) + (0)(m_{31}) + (X_9)(m_{41}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (X_1)(m_{11}) + (X_2)(m_{21}) + (X_3)(m_{31}) + 0 \\ 0 + (X_4)(m_{21}) + (X_5)(m_{31}) + 0 \\ 0 + (X_6)(m_{21}) + (X_7)(m_{31}) + (X_8)(m_{41}) \\ 0 + 0 + 0 + (X_9)(m_{41}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (X_1)(m_{11}) + (X_2)(m_{21}) + (X_3)(m_{31}) \\ (X_4)(m_{21}) + (X_5)(m_{31}) \\ (X_6)(m_{21}) + (X_7)(m_{31}) + (X_8)(m_{41}) \\ (X_9)(m_{41}) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

menggunakan pemisalan variabel baru diperoleh matriks  $\overline{A^3B}$  sebagai berikut

$$\overline{A^3B} = \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{21} \\ n_{31} \\ n_{41} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

dengan

$$\begin{aligned}
n_{11} &= \left( -(D_r + h_r) \right) \left( \frac{\alpha_A \alpha_S p_{\max} M^*}{M + M_{Turn}} \right) + \left( \frac{\alpha_A p_{\max} S^*}{M^* + M_{Turn}} - \frac{\alpha_A p_{\max} M^* S^*}{(M^* + M_{Turn})^2} \right) \left( -\frac{k_2 \alpha_A \alpha_S p_{\max} M^*}{M^* + M_{Turn}} \right) \\
&\quad + \left( \frac{\alpha_A p_{\max} S^*}{M^* + M_{Turn}} \right) \left( -\frac{k_3 \alpha_A \alpha_S p_{\max} M}{M^* + M_{Turn}} - \alpha_S D_r - \alpha_S h_r - k_1 (\alpha_S)^2 \right) \\
n_{21} &= \left( -\frac{k_2 \alpha_A p_{\max} S^*}{M^* + M_{Turn}} + \frac{k_2 \alpha_A p_{\max} M^* S^*}{(M^* + M_{Turn})^2} \right) \left( -\frac{k_2 \alpha_A \alpha_S p_{\max} M^*}{M^* + M_{Turn}} \right) + \left( -\frac{k_2 \alpha_A p_{\max} M^*}{M^* + M_{Turn}} \right) \\
&\quad \left( -\frac{k_3 \alpha_A \alpha_S p_{\max} M}{M^* + M_{Turn}} - \alpha_S D_r - \alpha_S h_r - k_1 (\alpha_S)^2 \right) \\
n_{31} &= \left( -\frac{k_3 \alpha_A p_{\max} S^*}{M^* + M_{Turn}} + \frac{k_3 \alpha_A p_{\max} M^* S^*}{(M^* + M_{Turn})^2} \right) \left( -\frac{k_2 \alpha_A \alpha_S p_{\max} M^*}{M^* + M_{Turn}} \right) + \left( -\frac{k_3 \alpha_A p_{\max} M^*}{M^* + M_{Turn}} \right) \\
&\quad \left( -(D_r + h_r) \right)
\end{aligned}$$

$$\left( -\frac{k_3 \alpha_A \alpha_S p_{\max} M}{M^* + M_{Turn}} - \alpha_S D_r - \alpha_S h_r - k_1 (\alpha_S)^2 \right) + (\alpha_S) \left( (k_1)^2 (\alpha_S)^2 \right)$$

$$n_{41} = (-k_1 \alpha_S) \left( (k_1)^2 (\alpha_S)^2 \right)$$

Persamaan (4.29), (4.30), (4.31) dan (4.32) dapat disusun matriks keterkontrolan ( $Ktr$ ) berukuran  $4 \times 4$  sebagai berikut

$$Ktr = \left( \bar{B} \mid \overline{AB} \mid \overline{A^2B} \mid \overline{A^3B} \right)$$

di mana setiap pasangan matriks saling bebas linear sehingga didapatkan  $rank(Ktr) = 4$ . Dengan demikian sistem dinamik pada Persamaan (4.5) – (4.8) dinyatakan bersifat terkontrol.

### 4.3 Formulasi Kendali Optimal

Hal yang ingin dicapai dalam permasalahan kendali optimal pada penelitian ini adalah mendapatkan aliran karbon dioksida yang optimal dengan nilai bobot minimal dari konsentrasi karbon dioksida di dalam aliran karbon dioksida sehingga dapat memaksimalkan alga. Secara matematika, permasalahan ini adalah memaksimumkan fungsi objektif

$$J(I_c) = \int_{t_0}^{t_f} \left( A(t) - \frac{D}{2} I_c^2(t) \right) dt \quad (4.23)$$

Dengan :

$I_c$  adalah kendali optimal,  $D$  adalah nilai bobot konsentrasi karbon dioksida di dalam aliran karbon dioksida,  $t_0$  adalah waktu awal, dan  $t_f$  adalah waktu akhir.

Langkah pertama dalam penyelesaian masalah kendali optimal adalah membentuk fungsi Hamilton. Dari fungsi objektif yang telah dibentuk pada Persamaan (4.23), maka diperoleh fungsi Hamiltonnya sebagai berikut :

$$H(A, M, S, C, I_c, \lambda) = A(t) - \frac{D}{2} I_c(t) + \sum_{i=1}^4 \lambda_i f_i$$

$$= A(t) - \frac{D}{2} I_c(t) + \lambda_1(t) \left( \alpha_A \left( p_{\max} \frac{M}{M + M_{Turn}} \right) S - (D_r + h_r) A \right)$$

$$+ \lambda_2(t) \left( -k_2 \alpha_A \left( p_{\max} \frac{M}{M + M_{Turn}} \right) S + i_m(t) \right) + \lambda_3(t)$$

$$\left( \alpha_s C - k_3 \alpha_A \left( p_{\max} \frac{M}{M + M_{Turn}} \right) S - (D_r + h_r) S \right) + \lambda_4(t) \\ (-k_1 \alpha_s C + i_c(t))$$

Berdasarkan Prinsip Pontryagin, diperoleh solusi dari fungsi Hamilton berupa aliran karbon dioksida yang optimal jika berlaku Persamaan state, costate dan kondisi stasioner.

a. Persamaan state

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = \alpha_A \left( p_{\max} \frac{M}{M + M_{Turn}} \right) S - (D_r + h_r) A$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = -k_2 \alpha_A \left( p_{\max} \frac{M}{M + M_{Turn}} \right) S + i_m(t)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_3} = \alpha_s C - k_3 \alpha_A \left( p_{\max} \frac{M}{M + M_{Turn}} \right) S - (D_r + h_r) S$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_4} = -k_1 \alpha_s C + i_c(t)$$

b. Persamaan costate

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial A}$$

$$= -(1 - \lambda_1(t)(D_r + h_r))$$

$$= -1 + \lambda_1(t)D_r + \lambda_1(t)h_r$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial M}$$

$$= - \left[ \lambda_1(t) \frac{\alpha_A p_{\max} S(t)}{M(t) + M_{Turn}} - \lambda_1(t) \frac{\alpha_A p_{\max} M(t) S(t)}{(M(t) + M_{Turn})^2} - \lambda_2(t) \frac{k_2 \alpha_A p_{\max} S(t)}{M(t) + M_{Turn}} \right. \\ \left. + \lambda_2(t) \frac{k_2 \alpha_A p_{\max} M(t) S(t)}{(M(t) + M_{Turn})^2} - \lambda_3(t) \frac{k_3 \alpha_A p_{\max} S(t)}{M(t) + M_{Turn}} \right. \\ \left. + \lambda_3(t) \frac{k_3 \alpha_A p_{\max} M(t) S(t)}{(M(t) + M_{Turn})^2} \right]$$

$$= \frac{\alpha_A p_{\max} S(t)}{M(t) + M_{Turn}} (-\lambda_1(t) + \lambda_2(t)k_2 + \lambda_3(t)k_3) + \frac{\alpha_A p_{\max} M(t) S(t)}{(M(t) + M_{Turn})^2}$$

$$(\lambda_1(t) - \lambda_2(t)k_2 - \lambda_3(t)k_3)$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial S}$$

$$\begin{aligned}
&= - \left[ \lambda_1(t) \left( \frac{\alpha_A p_{\max} M(t)}{M(t) + M_{Turn}} \right) - \lambda_2(t) \left( \frac{k_2 \alpha_A p_{\max} M(t)}{M(t) + M_{Turn}} \right) - \lambda_3(t) \left( \frac{\alpha_A p_{\max} M(t)}{M(t) + M_{Turn}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \lambda_3(t) (D_r + h_r) \right] \\
&= \frac{\alpha_A p_{\max} M(t)}{M(t) + M_{Turn}} (-\lambda_1(t) + \lambda_2(t) k_2 + \lambda_3(t) k_3) + \lambda_3(t) (D_r + h_r) \\
\frac{d\lambda_4}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial C} \\
&= - [\lambda_3(t) \alpha_S - \lambda_4(t) k_1 \alpha_S] \\
&= -\lambda_3(t) \alpha_S + \lambda_4(t) k_1 \alpha_S
\end{aligned}$$

c. Kondisi stasioner

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial I_c} &= 0 \\
-DI_c(t) + \lambda_4(t) &= 0 \\
DI_c(t) &= \lambda_4(t) \\
\bar{I}_c(t) &= \frac{\lambda_4(t)}{D}
\end{aligned}$$

Karena  $0 \leq I_c(t) \leq 4$  sehingga

$$I_c(t) = \begin{cases} 0 & , \bar{I}_c(t) \leq 0 \\ \bar{I}_c(t) & , 0 < \bar{I}_c(t) < 4 \\ 4 & , \bar{I}_c(t) \geq 4 \end{cases}$$

Jadi, kendali optimal  $I_c(t)$  dicirikan sebagai

$$I_{c*}(t) = \min(4, \max(0, \bar{I}_c(t)))$$

atau

$$I_{c*}(t) = \min \left( 4, \max \left( 0, \frac{\lambda_4(t)}{D} \right) \right).$$

Sistem optimal jika dengan memasukkan kendali optimal  $I_{c*}(t)$  ke dalam sistem Persamaan *state* dan *costate* sehingga diperoleh sistem sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} &= \alpha_A \left( p_{\max} \frac{M}{M + M_{Turn}} \right) S - (D_r + h_r) A \\
\frac{\partial H}{\partial \lambda_2} &= -k_2 \alpha_A \left( p_{\max} \frac{M}{M + M_{Turn}} \right) S + i_m(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \lambda_3} &= \alpha_s C - k_3 \alpha_A \left( p_{\max} \frac{M}{M + M_{Turn}} \right) S - (D_r + h_r) S \\
\frac{\partial H}{\partial \lambda_4} &= -k_1 \alpha_s C + \left( \min \left( 4, \max \left( 0, \frac{\lambda_4(t)}{D} \right) \right) \right) \\
\frac{d\lambda_1}{dt} &= 1 + \lambda_1(t) D_r + \lambda_1(t) h_r \\
\frac{d\lambda_2}{dt} &= \frac{\alpha_A p_{\max} S(t)}{M(t) + M_{Turn}} (-\lambda_1(t) + \lambda_2(t) k_2 + \lambda_3(t) k_3) + \frac{\alpha_A p_{\max} M(t) S(t)}{(M(t) + M_{Turn})^2} \\
&= \frac{\alpha_A p_{\max} S(t)}{M(t) + M_{Turn}} (-\lambda_1(t) + \lambda_2(t) k_2 + \lambda_3(t) k_3) + \frac{\alpha_A p_{\max} M(t) S(t)}{(M(t) + M_{Turn})^2} \\
&\quad (\lambda_1(t) - \lambda_2(t) k_2 - \lambda_3(t) k_3) \\
\frac{d\lambda_3}{dt} &= \frac{\alpha_A p_{\max} M(t)}{M(t) + M_{Turn}} (-\lambda_1(t) + \lambda_2(t) k_2 + \lambda_3(t) k_3) + \lambda_3(t) (D_r + h_r) \\
\frac{d\lambda_4}{dt} &= -\lambda_3(t) \alpha_s + \lambda_4(t) k_1 \alpha_s
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Karena penyelesaiannya dari Persamaan diferensial (4.33) sulit diperoleh secara analitik, maka permasalahan ini diselesaikan secara numerik menggunakan software Matlab.

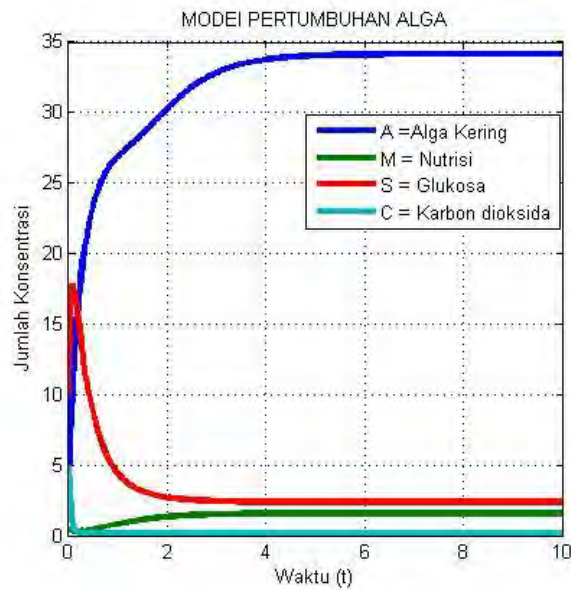
#### 4.4 Simulasi Numerik

##### 4.4.1 Kestabilan Model Pertumbuhan Alga

Model pertumbuhan alga disimulasikan tanpa adanya pengendali terhadap aliran karbon dioksida. Untuk mengetahui perubahan jumlah alga, konsentrasi nutrisi, glukosa dan karbon dioksida model disimulasikan di saat kondisi awal  $(A^0, M^0, S^0, C^0)$  adalah  $(3, 0.4, 10, 5)$ ,  $(3, 0.6, 15, 7.5)$  dan  $(3, 0.6, 15, 7.5)$ . Sedangkan nilai parameter yang digunakan diberikan pada tabel berikut:

**Tabel 0.2** Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi

Parameter	$\alpha_A$	$p_{\max}$	$D_r$	$h_r$	$M_{Turn}$	$I_m$	$\alpha_s$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$I_c$
Nilai	10,2	0,4	0,46	2	4	4,2	67,6	0,4	0.05	0.05	4

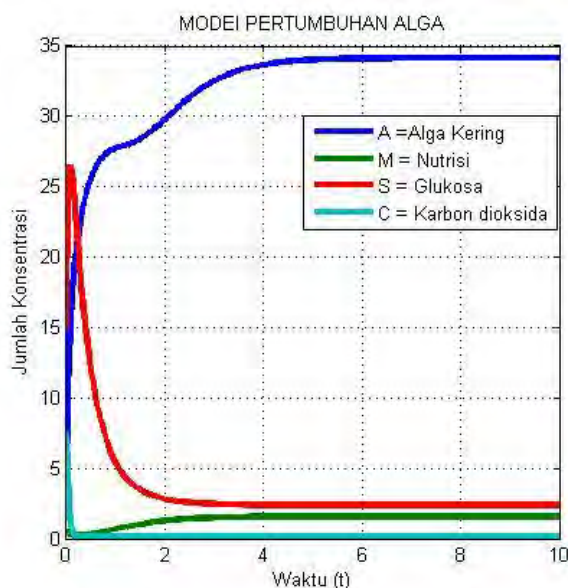


**Gambar 4.1** Perubahan jumlah setiap konsentrasi pada pertumbuhan alga tanpa kendali dengan  $(A^0, M^0, S^0, C^0) = (3, 0.4, 10, 5)$

dari Gambar 4.1, nilai awal konsentrasi alga kering =  $3 \text{ g}[A]m^{-3}$ , konsentrasi nutrisi =  $0,4 \text{ g}[M]m^{-3}$ , konsentrasi glukosa =  $10 \text{ g}[CH_2O]m^{-3}$  dan konsentrasi karbon dioksida =  $5 \text{ g}[CO_2]m^{-3}$ . Gambar 4.1 menunjukkan adanya peningkatan konsentrasi alga kering secara signifikan hingga  $34,146 \text{ g}[A]m^{-3}$  pada hari ke- 6. Setelah itu tidak mengalami perubahan, yang berarti keadaan sudah stabil. Hal yang menyebabkan konsentrasi alga kering meningkat adalah konsentrasi glukosa dan nutrisi. Untuk konsentrasi nutrisi mengalami peningkatan yang dikarenakan aliran nutrisi yang diberikan cukup besar dan stabil hingga konsentrasinya  $1,568 \text{ g}[A]m^{-3}$ . Sedangkan konsentrasi glukosa nilai awalnya cukup besar dan di waktu awal juga mengalami peningkatan. Kemudian menurun hingga  $2,357 \text{ g}[A]m^{-3}$  yang merupakan titik setimbangnya. Untuk konsentrasi karbon dioksida mengalami penurunan, hal ini disebabkan karbon dioksida akan di ubah menjadi glukosa. Semakin besar konsentrasi glukosa maka konsentrasi karbon dioksida menurun. Penurunan konsentrasi karbon dioksida akan berhenti atau stabil pada  $0,147 \text{ g}[A]m^{-3}$  yang merupakan titik setimbangnya.

Jika kondisi awal dari konsentrasi alga kering, nutrisi, glukosa dan karbon dioksida  $(A^0, M^0, S^0, C^0)$  adalah  $(3, 0.6, 15, 7.5)$ . Di mana komposisi dari

konsentrasi nutrisi, glukosa dan karbon dioksida meningkat 50% dari nilai sebelumnya pada Gambar 4.1. Adapun hasil simulasinya sebagai berikut :

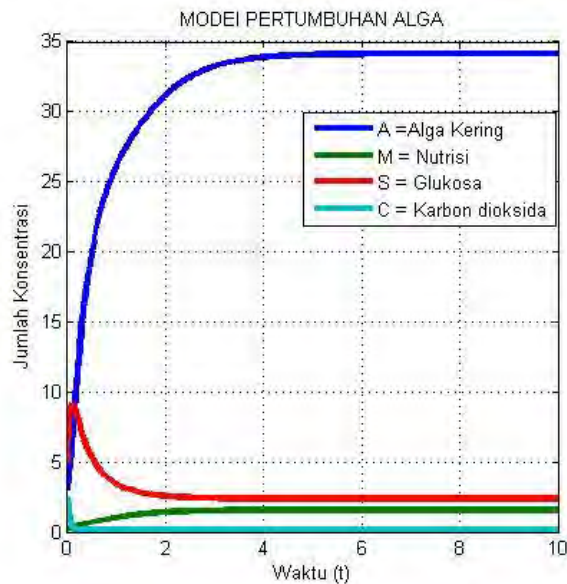


**Gambar 4.2** Perubahan jumlah setiap konsentrasi pada pertumbuhan alga tanpa kendali dengan  $(A^0, M^0, S^0, C^0) = (3, 0.6, 15, 7.5)$

Gambar 4.2 menunjukkan adanya peningkatan konsentrasi alga kering secara signifikan hingga  $34,146 \text{ g}[A]m^{-3}$ . Setelah itu tidak mengalami perubahan, yang berarti keadaan sudah stabil. Hal yang menyebabkan konsentrasi alga kering meningkat adalah konsentrasi glukosa dan nutrisi. Untuk konsentrasi nutrisi mengalami peningkatan yang dikarenakan aliran nutrisi yang diberikan cukup besar dan stabil hingga konsentrasinya  $1,568 \text{ g}[A]m^{-3}$ . Sedangkan konsentrasi glukosa nilai awalnya cukup besar dan di waktu awal juga mengalami peningkatan hingga  $26,526 \text{ g}[A]m^{-3}$ . Kemudian menurun menjadi  $2,357 \text{ g}[A]m^{-3}$  yang merupakan titik setimbangnya. Untuk konsentrasi karbon dioksida mengalami penurunan, hal ini disebabkan karbon dioksida akan di ubah menjadi glukosa. Semakin besar konsentrasi glukosa maka konsentrasi karbon dioksida menurun. Penurunan konsentrasi karbon dioksida akan berhenti atau stabil pada  $0,147 \text{ g}[A]m^{-3}$  yang merupakan titik setimbangnya.

Saat kondisi awal dari konsentrasi alga kering, nutrisi, glukosa dan karbon dioksida  $(A^0, M^0, S^0, C^0)$  adalah  $(3, 0.2, 5, 2.5)$ . Di mana komposisi dari

konsentrasi nutrisi, glukosa dan karbon dioksida menurun 50% dari komposisi sebelumnya pada Gambar 4.1. Adapun hasil simulasinya sebagai berikut :



**Gambar 4.3** Perubahan jumlah setiap konsentrasi pada pertumbuhan alga tanpa kendali dengan  $(A^0, M^0, S^0, C^0) = (3, 0.2, 5, 2.5)$

Gambar 4.3 menunjukkan adanya peningkatan konsentrasi alga kering secara signifikan hingga  $34,146 \text{ g}[A]m^{-3}$ . Setelah itu tidak mengalami perubahan, yang berarti keadaan sudah stabil. Hal yang menyebabkan konsentrasi alga kering meningkat adalah konsentrasi glukosa dan nutrisi. Untuk konsentrasi nutrisi mengalami peningkatan yang dikarenakan aliran nutrisi yang diberikan cukup besar dan stabil hingga konsentrasinya  $1,568 \text{ g}[A]m^{-3}$ . Sedangkan konsentrasi glukosa nilai awalnya cukup besar dan hari pertama mengalami peningkatan hingga  $9,194 \text{ g}[A]m^{-3}$ . Kemudian menurun menjadi  $2,357 \text{ g}[A]m^{-3}$  yang merupakan titik setimbangnya. Untuk konsentrasi karbon dioksida mengalami penurunan, hal ini disebabkan karbon dioksida akan di ubah menjadi glukosa. Semakin besar konsentrasi glukosa maka konsentrasi karbon dioksida menurun. Penurunan konsentrasi karbon dioksida akan berhenti atau stabil pada  $0.147 \text{ g}[A]m^{-3}$  yang merupakan titik setimbangnya.

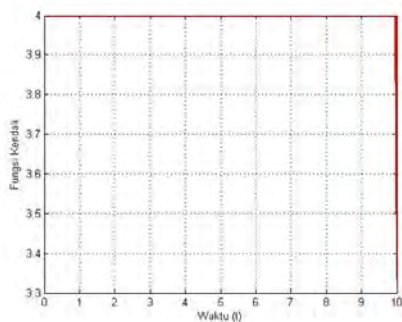
Penyelesaian analitik tentang kestabilan sistem beserta simulasinya menunjukkan sistem dinamik model pertumbuhan alga bersifat stabil.



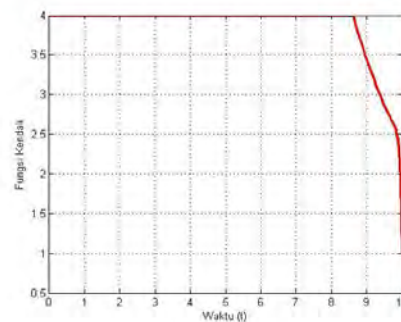
Selanjutnya, sistem dinamik model pertumbuhan alga dengan keadaan stabil diharapkan meningkat ketika diberikan kendali.

#### 4.4.2 Kendali Optimal Pertumbuhan Alga

Dengan menggunakan Software Matlab sistem dinamik yang telah membentuk Persamaan state, costate dan kondisi stasioner akan mendapatkan solusi optimal dari aliran karbon dioksida yang dipengaruhi nilai bobot konsentrasi karbon dioksida di dalam aliran tersebut. Nilai bobot yang diberikan untuk kendali memiliki nilai minimum dan maksimum. Jika kurang dari nilai minimum dan melebihi nilai maksimum, sistem tidak dapat dikontrol. Karena hasil konsentrasi alga kering yang diperoleh sebelum diberikan kendali lebih besar setelah diberikan kendali. Adapun nilai bobot yang memenuhi  $0.3 \leq D \leq 1$ . Kemudian akan dianalisa pengaruhnya terhadap variabel kendali berupa aliran karbon dioksida ( $I_c(t)$ ) dan laju perubahan konsentrasi alga kering, nutrisi, glukosa dan karbon dioksida.



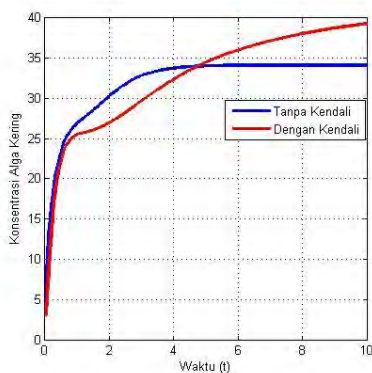
**Gambar 4.4** Fungsi kendali dengan nilai bobot konsentrasi karbon dioksida dari aliran karbon dioksida adalah 0,3



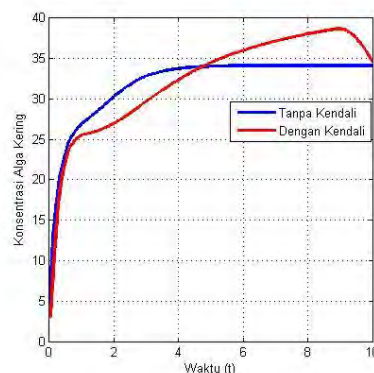
**Gambar 4.5** Fungsi kendali dengan nilai bobot konsentrasi karbon dioksida dari aliran karbon dioksida adalah 1

Gambar 4.4 menunjukkan bahwa nilai awal yang merupakan nilai maksimal dari fungsi kendali. Saat bobot konsentrasi karbon dioksida dari aliran karbon dioksida bernilai 0,3. Nilai kendali mengalami perubahan pada hari ke- 1 hingga hari ke- 3. Tetapi perubahannya sangat kecil, 8% menjadi 7,998% dari volume. Kemudian nilai kendalinya menjadi maksimal, sebesar 8% dari volume hingga mendekati

hari ke- 10. Hasil fungsi objektif untuk memaksimumkan jumlah alga kering adalah  $372.5627 \text{ g}[A]\text{m}^{-3}$  Sedangkan nilai bobot 1, tidak mengalami perubahan nilai kendali selama 8 hari. Setiap hari diberikan kendali 8 % dari volume. Pada hari ke-9 nilai kendali menurun hingga 2% dari volume sampai  $t = 10$  hari. Sedangkan hasil fungsi objektif untuk memaksimumkan jumlah alga kering adalah  $273.6691 \text{ g}[A]\text{m}^{-3}$ .

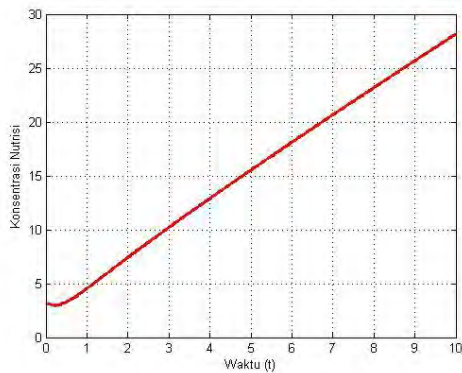


**Gambar 4.6** Perubahan konsentrasi alga kering dengan nilai bobot konsentrasi karbon dioksida dari aliran karbon dioksida adalah 0,3

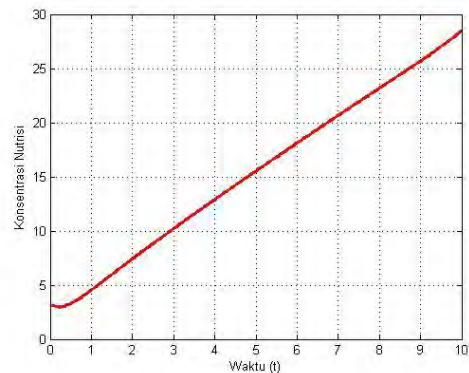


**Gambar 4.7** Perubahan konsentrasi alga kering dengan nilai bobot konsentrasi karbon dioksida dari aliran karbon dioksida adalah 1

Konsentrasi alga kering tanpa kendali dan dengan kendali mengalami perubahan. Dan konsentrasi alga kering berdasarkan fungsi kendali yang diklasifikasikan atas dua nilai bobot yaitu nilai bobot 0,1 dan 1. Pada Gambar 4.6 tanpa kendali konsentrasi alga kering meningkat hingga  $34.1463 \text{ g}[A]\text{m}^{-3}$  dan stabil hingga  $t = 10$  hari. Dengan adanya kendali konsentrasi alga kering mengalami peningkatan sebesar  $39.5174 \text{ g}[A]\text{m}^{-3}$  sampai hari ke- 10. Terjadi peningkatan konsentrasi alga kering dikarenakan kendali yang diberikan maksimal selama 10 hari. Seperti pada Gambar 4.4. Sehingga tidak terjadi penurunan konsentrasi alga kering. Sedangkan Gambar 4.7 konsentrasi alga kering juga mengalami peningkatan sebesar  $38,9096 \text{ g}[A]\text{m}^{-3}$  pada hari ke- 9. Tetapi hari ke- 10 mengalami penurunan konsentrasi menjadi  $34,5297 \text{ g}[A]\text{m}^{-3}$ . Perubahan konsentrasi alga kering yang mengalami peningkatan dan penurunan konsentrasi juga dikarenakan besarnya kendali yang diberikan selama 10 hari. Seperti yang terlihat pada Gambar 4.4 dan Gambar 4.5.

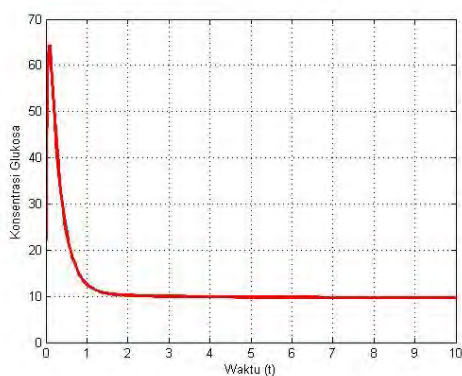


**Gambar 4.8** Perubahan konsentrasi nutrisi dengan nilai bobot konsentrasi karbon dioksida dari aliran karbon dioksida adalah 0.3

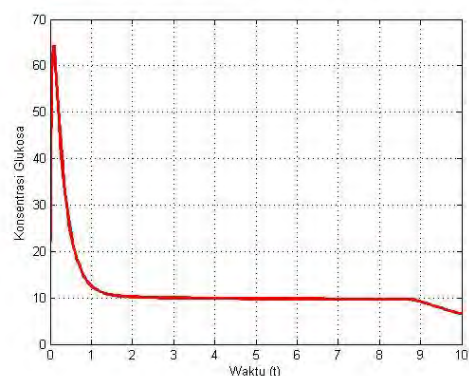


**Gambar 4.9** Perubahan konsentrasi nutrisi dengan nilai bobot konsentrasi karbon dioksida dari aliran karbon dioksida adalah 1

Untuk konsentrasi nutrisi tanpa kendali dan adanya kendali mengalami peningkatan. Tanpa kendali konsentrasi meningkat dan konstan hingga  $t = 10$  hari. Sedangkan konsentrasi nutrisi dengan adanya kendali yang diklasifikasikan atas nilai bobot 0.3 dan 1. Pada Gambar 4.8 konsentrasi nutrisi meningkat hingga  $28.1370 \text{ g}[M]m^{-3}$  sampai  $t = 10$  hari. Sedangkan Gambar 4.9 menunjukkan dengan nilai bobot 1 peningkatan konsentrasi nutrisi sebesar  $28.4595 \text{ g}[M]m^{-3}$  sampai  $t = 10$  hari. Peningkatan konsentrasi nutrisi bukan hanya di akibatkan kendali tetapi aliran nutrisi juga mempengaruhi. Sehingga konsentrasi nutrisi tidak mengalami penurunan.

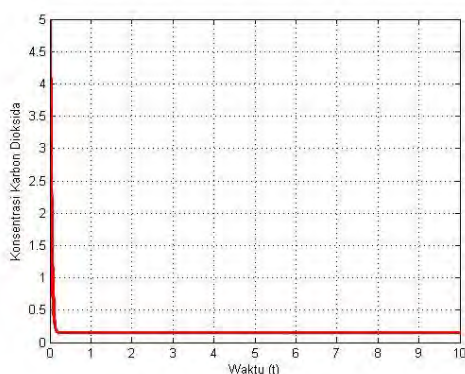


**Gambar 4.10** Perubahan konsentrasi glukosa dengan nilai bobot konsentrasi karbon dioksida dari aliran karbon dioksida adalah 0,3

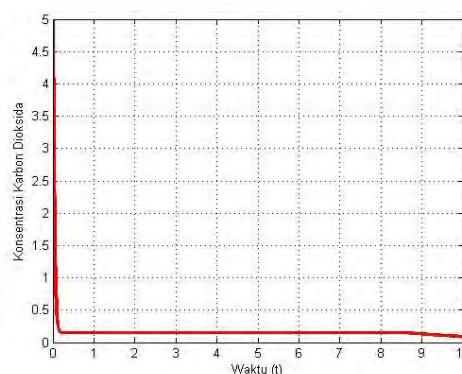


**Gambar 4.11** Perubahan konsentrasi glukosa dengan nilai bobot konsentrasi karbon dioksida dari aliran karbon dioksida adalah 1

Konsentrasi glukosa tanpa kendali dan dengan kendali mengalami perubahan. Tanpa kendali konsentrasi awalnya mengalami peningkatan. Kemudian menurun menuju nilai yang konstan hingga  $t = 10$  hari. Perubahan konsentrasi glukosa akibat kendali aliran karbon dioksida yang diklasifikasikan atas nilai bobot 0,3 dan 1 tidak jauh berbeda dengan tanpa kendali. Dimana konsentrasi glukosa awalnya mengalami peningkatan dan akhirnya turun. Pada Gambar 4.10 peningkatan konsentrasi glukosa sebesar  $64.3603 \text{ g}[CH_2O]m^{-3}$  pada hari pertama. Kemudian menurun hingga  $9.6333 \text{ g}[CH_2O]m^{-3}$   $t = 10$  hari. Sedangkan Gambar 4.11 dengan nilai awalnya juga 10, mengalami peningkatan  $64.3603 \text{ g}[CH_2O]m^{-3}$  pada hari pertama. Dan mengalami penurunan hingga  $6.4609 \text{ g}[CH_2O]m^{-3}$  hingga hari ke- 10. Peningkatan konsentrasi glukosa terjadi akibat besarnya kendali yang diberikan di waktu awal. Dan konsentrasi glukosa menurun akibat perubahan konsentrasi alga kering.



**Gambar 4.12** Perubahan konsentrasi karbon dioksida dengan nilai bobot konsentrasi karbon dioksida dari aliran karbon dioksida adalah 0,3



**Gambar 4.13** Perubahan konsentrasi karbon dioksida dengan nilai bobot konsentrasi karbon dioksida dari aliran karbon dioksida adalah 1

Sedangkan konsentrasi karbon dioksida tanpa kendali dan dengan kendali mengalami perubahan. Tanpa kendali konsentrasi mengalami penurunan dan menuju nilai konstan hingga  $t = 10$  hari. Perubahan konsentrasi karbon dioksida akibat kendali aliran karbon dioksida yang diklasifikasikan atas nilai bobot 0,3 dan 1 tidak jauh berbeda dengan tanpa kendali. Gambar 4.12 menunjukkan konsentrasi karbon dioksida menurun hingga  $0.1479 \text{ g}[CO_2]m^{-3}$  pada hari pertama. Setelah waktu tersebut konsentrasi karbon dioksida konstan sampai hari

ke- 10. Gambar 4.13 dengan nilai bobot 1 konsentrasi karbon dioksida menurun hingga  $0.1479 \text{ g}[CO_2]m^{-3}$  pada hari ke- 1. Setelah waktu tersebut konsentrasi karbon dioksida konstan sampai hari ke-9. Sedangkan di hari ke-10 konsentrasi karbon dioksida menjadi  $0.0755 \text{ g}[CO_2]m^{-3}$ . Karbon dioksida yang ada akan selalu dipakai untuk menghasilkan glukosa. Sehingga karbon dioksida selalu mengalami penurunan yang mengakibatkan konsentrasi glukosa meningkat.

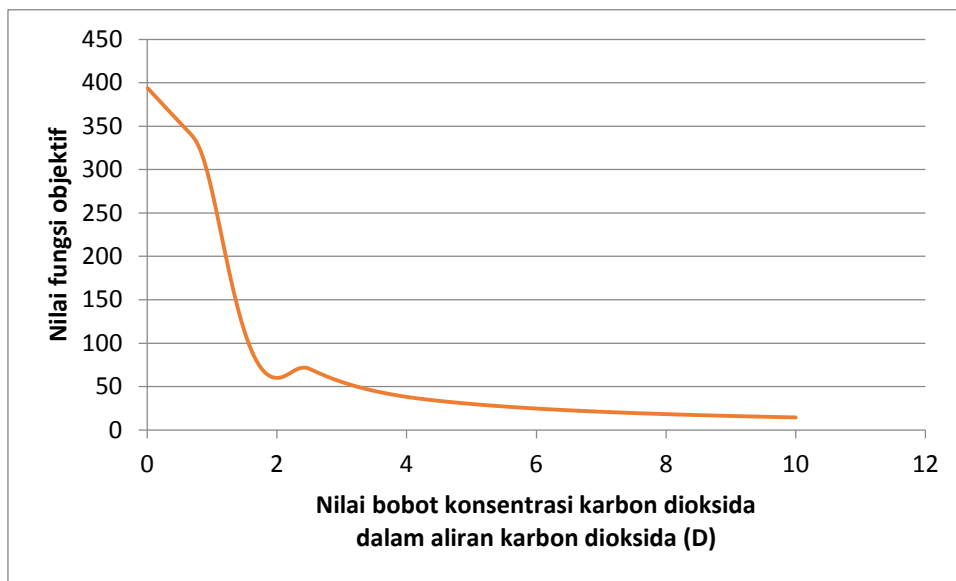
Kendali optimal berupa aliran karbon dioksida ( $I_c$ ) dan konsentrasi alga kering ( $A$ ) yang diperoleh setiap hari selama 10 hari dipengaruhi nilai bobot konsentrasi karbon dioksida ( $D$ ) dari aliran karbon dioksida ( $I_c$ ). Berikut nilai fungsi objektif untuk setiap nilai bobot dari 0,3 sampai 1.

**Tabel 0.2** Nilai bobot konsentrasi karbon dioksida dalam aliran karbon dioksida dan nilai fungsi objektif

Nilai bobot konsentrasi karbon dioksida dalam aliran karbon dioksida	Nilai fungsi Objektif
0,3	372.5627
0,4	364.5801
0,5	356.6014
0,6	348.6815
0,7	340.5450
0,8	327.2719
0,9	304.6161
1	273.6691

Semakin besar nilai bobot konsentrasi karbon dioksida dalam aliran karbon dioksida semakin kecil nilai fungsi objektif yang dihasilkan.

Selanjutnya akan digambarkan perilaku nilai bobot konsentrasi karbon dioksida dalam aliran karbon dioksida terhadap fungsi objektif. Di mana nilai bobot berada pada interval  $0.01 \leq D \leq 10$  dengan  $i = 1 \dots 1000$



**Gambar 4.14** Perilaku nilai bobot konsentrasi karbon dioksida dalam aliran karbon dioksida terhadap fungsi objektif.

Gambar 4.14 menunjukkan perubahan nilai fungsi objektif berdasarkan nilai bobot konsentrasi karbon dioksida dalam aliran karbon dioksida. Saat nilai bobot  $[0,01 - 2]$  terjadi penurunan nilai fungsi objektif. Untuk nilai bobot 0,01 menunjukkan hasil fungsi objektif sebesar 393,5687. Kemudian hasil fungsi objektif berkurang hingga 60,0391 saat nilai bobot 2. Selanjutnya nilai fungsi objektif bertambah hingga 71,8127 saat nilai bobot 2,42. Dan akhirnya nilai fungsi objektif mengalami penurunan sebesar 14,5018 saat nilai bobot 10. Nilai bobot  $[0,01 - 2]$ , yang memungkinkan terjadinya peningkatan konsentrasi alga kering adalah  $[0,3 - 1]$ . Sedangkan peningkatan nilai fungsi objektif saat nilai bobot  $[2 - 2,42]$  tidak menyebabkan terjadinya peningkatan konsentrasi alga kering. Untuk nilai bobot  $[2,42 - 10]$  menyebabkan nilai fungsi objektif dan konsentrasi alga kering semakin berkurang.

## BAB 5

### KESIMPULAN DAN SARAN

#### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

- a. Sistem dinamik pada model pertumbuhan alga bersifat stabil dan terkontrol.
- b. Dengan menerapkan teori kendali optimal menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin diperoleh pengendali optimal berupa aliran karbon dioksida ( $I_c$ ) pada pertumbuhan alga.
- c. Hasil simulasi tanpa kendali pada konsentrasi alga kering menunjukkan peningkatan hingga  $34.1463 \text{ g}[A]m^{-3}$  dan konstan hingga  $t = 10$  hari. Jika diberi kendali dengan nilai bobot 0,3 maka konsentrasi alga kering meningkat hingga  $39.5174 \text{ g}[A]m^{-3}$  pada hari ke- 10. Sedangkan diberi kendali dengan nilai bobot 1 maka konsentrasi alga kering meningkat hingga  $38,9096 \text{ g}[A]m^{-3}$  pada hari ke- 9. Tetapi hari ke- 10 mengalami penurunan konsentrasi menjadi  $34,5297 \text{ g}[A]m^{-3}$ . Yang berarti konsentrasi alga kering meningkat setelah diberikan kendali dengan nilai bobot 0,3 sebesar 15,73 %. Sedangkan dengan nilai bobot 1 konsentrasi alga kering meningkat sebesar 13,95 % setelah diberikan kendali.
- d. Berdasarkan klasifikasi nilai bobot yang diberikan yaitu nilai bobot 0,3 dan 1. Hasil simulasi menunjukkan bahwa pertumbuhan alga pada nilai bobot 0,3 lebih besar dari nilai bobot 1. Hasil fungsi objektif untuk nilai bobot 0,3 juga lebih besar dari nilai bobot 1. Sehingga pertumbuhan alga dapat maksimal dengan nilai bobot minimal dari konsentrasi karbon dioksida dalam aliran karbon dioksida.

## **5.2 Saran**

Pada penulisan selanjutnya, hal yang dapat dikembangkan dari tesis ini adalah

1. Memaksimalkan pertumbuhan alga dengan kendali pada aliran nutrisinya dengan metode yang sama atau metode kendali optimal lainnya.
2. Memaksimalkan pertumbuhan alga dengan kendali pada bobot konsentrasi karbon dioksida dalam aliran karbon dioksida dengan metode yang sama atau metode kendali optimal lainnya.



## DAFTAR PUSTAKA

- Amini, S. dan Sugiyono. (2009), Penelitian optimalisasi umur mikroalga *Spirulina platensis* penghasil bahan baku biofuel. *Prosiding Seminar Nasional Tahunan VI Hasil Penelitian Perikanan dan Kelautan*, Jilid III–Pengolahan/Teknologi Hasil Perikanan.p 1–5.
- Basmal, J. (2008), Peluang dan tantangan pemanfaatan mikroalga sebagai biofuel. *Squalen Buletin Pascapanen Bioteknologi Kelautan dan Perikanan*. 3 (1): 34–39.
- Brown, M.R. (2002), Nutritional value of microalgae for aquaculture. In Cruz-Suárez, L. E., Ricque-Marie, D., Tapia-Salazar, M., Gaxiola-Cortés, M. G., Simoes, N. (Eds.). *Avances en Nutrición Acuicola VI. Memorias del VI Simposium Internacional de Nutrición Acuicola; 3 al 6 de Septiembre del 2002*. Cancún, Quintana Roo, México. p. 281–292.
- Faradilla. A dan Juwita,A.R., (2012), *Pemanfaatan air limbah pabrik pupuk kadar amonia tinggi sebagai media kultur mikroalga untuk perolehan sumber minyak nabati sebagai bahan baku biodiesel*. Jurusan Teknik Kimia Fakultas Teknik-Universitas Diponegoro, Semarang
- Harun, R., Singh, M., Forde, G.M., and Danquah, M.K. (2010a), Bioprocess engineering of microalgae to produce a variety of consumer products. *Renewable and Sustainable Energy Review*. 14: 1037–1047.
- Harun, R., Jason, W.S.Y., Cherrington, T., and Danquah, M.K. (2010b), Microalgal biomass as a cellulosic fermentation feedstock for bioethanol production. *Renewable and Sustainable Energy Review*. *In press*.
- Hossain, A.B.M., Salleh, A., Boyce, A.N., Chowdhury, P., and Naqiuddin, M. (2008), Biodiesel fuel production from algae as renewable energy. *American Journal of Biochemistry and Biotechnology*. 4 (3): 250–254.
- Naidu, D.S., (2002), *Optimal Control System*, CRC PRESS, New York.
- Ogata, K., (2010), *Modern Control Engineering Fifth Edition*, Prentice Hall, New Jersey.

- Patil, V., Tran, K.Q., and Gislerod, H.R. 2008. Towards sustainable production of biofuels from microalgae. *Int. J. Mol. Sci.* 9: 118 –1195.
- Shields, R.J., Bell, J.G., Luizi, F.S., Gara, B., Bromage, N.R., and Sargent, J.R. (1999), Natural copepods are superior to enriched *Artemia* nauplii as feed for Halibut larvae (*Hippoglossus hippoglossus*) in terms of survival, pigmentation and retinal morphology: Relation to dietary essential fatty acids. *Journal of Nutrition*. 1186–1194.
- Skill, S. (2007), Microalgae biofuels. Marine futures conference. *National Marine Aquarium*. 18 pp.
- Stanislaw, H. Zak. (2003), *Systems and Control*, Oxford University Press.
- Subiono (2013), *Sistem Linear dan Kontrol Optimal*, Jurusan Matematika FMIPA-ITS, Surabaya.
- Subchan, S. Dan Zbikowski, R. (2009), *Computational Optimal Control Tools and Practice*, John Willey and Sons Ltd. Publication, United Kingdom.
- Taylor, J.J., Southgate, P.C., Wing, M.S., and Rose, R.A. (1997), The nutritional value of five species of microalgae for spat of the Silver-Lip Pearl Oyster, *Pinctada maxima* (Jameson)(*Mollusca: Pteriidae*). *Asian Fisheries Science*. 10: 1–8.
- Thornton, A., dkk (2010), Modeling and Optimization of Algae Growth. ISSN : 0926-4507.
- Widjaja, A. (2009). Lipid production from microalgae as a promising candidate for biodiesel production. *Makara Teknologi*. 13(1): 47–51.